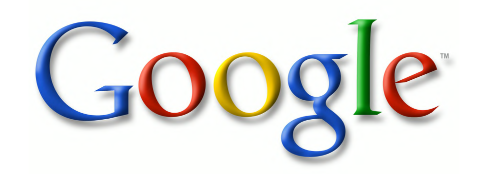
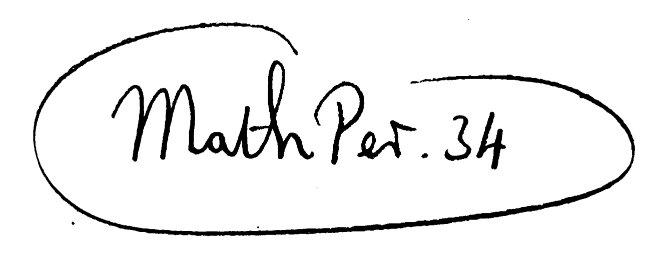
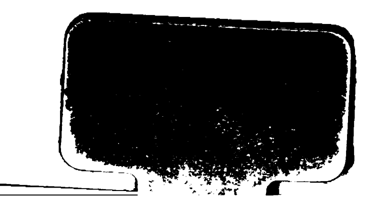





Math Per. 34





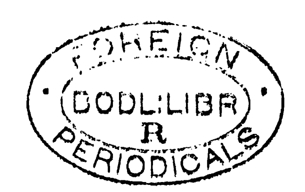
NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1883




ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE FONTANES.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DEUXIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1883


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE FONTANES.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DEUXIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1883

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOTE SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ (1).

Il n'est guère de problème qui ait donné lieu à plus de tentatives que celui de la quadrature du cercle : on entend par là, comme on sait, la construction avec la règle et le compas, c'est-à-dire à l'aide d'un nombre limité de droites et de cercles, du carré équivalent à un cercle donné quelconque. L'insuccès de tant d'efforts avait fait regarder ce problème comme impossible, bien qu'il n'existât, à vrai dire, aucune démonstration rigoureuse de cette impossibilité; on avait seulement prouvé jusqu'ici que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable (LAMBERT, 1761), et qu'il en est de même de son carré (LEGENDRE, *Note IV* de sa *Géométrie;* HERMITE, *Journal de Crelle,* 1873).

Dans tout problème susceptible d'être résolu avec la règle et le compas, chaque point de la figure s'obtient par l'intersection de deux droites ou d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles; si l'on imagine qu'on traduise algébriquement les constructions au fur et à mesure, à l'aide des formules de la Géométrie analytique, on aperçoit qu'on n'aura jamais à résoudre que des équations

(1) Tirée de la cinquième édition du *Traité de Géométrie* de MM. Eug. Rouché et Ch. de Comberousse, qui vient de paraître à la librairie Gauthier-Villars.

linéaires ou quadratiques, en sorte que l'équation finale pourra, par un nombre suffisant d'élévations au carré successives, être ramenée à une équation de degré pair à coefficients rationnels. On aura donc démontré l'impossibilité de la quadrature du cercle, si l'on prouve que *le nombre π ne saurait être racine d'une équation de degré quelconque à coefficients rationnels.*

M. Lindemann a annoncé (*Comptes rendus*, t. XCV, et *Mathematische Annalen*, t. XX; 1882) qu'il était parvenu à déduire cette proposition de certaines formules de M. Hermite (*Mémoire sur la fonction exponentielle*, 1874); sa méthode n'est qu'une généralisation, mais fort habile, de celle qu'avait employée l'illustre géomètre pour démontrer que le nombre e, base des logarithmes népériens, jouit de la propriété similaire.

Nous allons exposer, en simplifiant quelques détails, les formules de M. Hermite et les recherches de M. Lindemann; ce dernier travail, si remarquable, appelle d'autant plus l'attention qu'il ne semble pas devoir être le dernier mot sur ce sujet, au moins sous le rapport de la simplicité.

Formules de M. Hermite.

1. Remarquons d'abord que, si l'on désigne par m un nombre entier et positif quelconque, par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines d'une équation entière de la forme

$$(\alpha)\qquad f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

on peut toujours déterminer un polynôme entier et de degré n en z

$$(1)\qquad \Phi(z, z_i) = z^n + \theta_1(z_i) z^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_i),$$

tel qu'on ait identiquement

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{zf(z)}{z - z_i} &= \Phi(z, z_i) - \frac{d\Phi(z, z_i)}{dz} \\ &\quad - m\left[\frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \ldots + \frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_n, z_i)}{z - z_n}\right], \end{aligned} \right.$$

i désignant l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, n$, à condition de remplacer z_0 par zéro.

Car, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres, on trouve, puisque le premier terme est z^n de part et d'autre, n relations qui permettent de déterminer les n coefficients

$$\theta_1(z_i), \ldots, \theta_n(z_i);$$

ces relations, qu'on déduit de

$$\begin{aligned} & z_i^k + a z_i^{k-1} + \ldots + a_k \\ & \quad = \theta_k(z_i) - (n+k-1)\theta_{k-1}(z_i) \\ & \qquad - m[S_0\theta_{k-1}(z_i) + S_1\theta_{k-2}(z_i) + \ldots + S_{k-2}\theta_1(z_i) + S_{k-1}], \end{aligned}$$

en faisant successivement k égal à $1, 2, \ldots, n$ et où S_0, $S_1, \ldots$ désignent les sommes des puissances semblables des racines de $f(z) = 0$, montrent que $\theta_k(z_i)$ est un polynôme de la forme

$$\theta_k(z_i) = z_i^k + b_1 z_i^{k-1} + \ldots + b_k,$$

$b_1, \ldots, b_k$ étant des fonctions entières symétriques et à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$.

L'expression (1) fait voir en outre que, si l'on pose

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & \ldots & z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix},$$

on a

$$\delta \times \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \theta_1(z_0) & \ldots & \theta_1(z_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \theta_n(z_0) & \ldots & \theta_n(z_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \ldots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \ldots & \Phi(z_n, z_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Phi(z_0, z_n) & \ldots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix};$$

et comme, en vertu de l'expression de $\theta_k(z_i)$, le second déterminant se réduit par des transformations bien connues à δ, on voit que le dernier déterminant est égal à δ^2.

Enfin, si l'on désigne par $\varphi(z, z_i)$ ce que devient $\Phi(z, z_i)$ lorsqu'on y remplace m par zéro, on a

$$(2') \qquad \frac{zf(z)}{z - z_i} = \varphi(z, z_i) - \frac{d\varphi(z, z_i)}{dz},$$

et

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \varphi(z_0, z_0) & \dots & \varphi(z_n, z_0) \\ \varphi(z_0, z_1) & \dots & \varphi(z_n, z_1) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi(z_0, z_n) & \dots & \varphi(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \delta^2.$$

2. Cela posé, considérons l'intégrale

$$\frac{1}{1.2\dots(m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i} dz,$$

le chemin d'intégration pouvant être choisi à volonté, à condition toutefois de ne pas passer par l'infini; nous désignerons cette intégrale par le symbole m_k^i.

En multipliant les deux membres de la relation (2) par $e^{-z} z^m f^m(z)$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-z} z^{m+1} f^{m+1}(z)}{z - z_i} \\ &= \frac{d}{dz}[e^{-z} z^m f^m(z) \Phi(z, z_i)] \\ &\quad + m e^{-z} z^m f^m(z) \left[\frac{\Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \dots + \frac{\Phi(z_n, z_i)}{z - z_i} \right]; \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par dz et intégrant entre les limites o et z_k,

$$(m+1)_k^i = \Phi(z_0, z_i) m_k^0 + \dots + \Phi(z_n, z_i) m_k^n.$$

La recherche des intégrales $(m+1)_k^i$ se trouve ainsi ramenée à celle des intégrales m_k^i. Par le même procédé, on ramènera à leur tour celles-ci aux intégrales $(m-1)_k^i$ et, en continuant de la sorte, on arrivera à la formule

$$m_k^i = \mathrm{U}_0^i (1)_k^0 + \dots + \mathrm{U}_n^i (1)_k^n,$$

avec la relation

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} U_0^0 & \dots & U_n^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ U_0^n & \dots & U_n^n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)}.$$

Mais, en multipliant par e^{-z} les deux membres de la relation (2′), on a

$$\frac{e^{-z} z f(z)}{z - z_i} = \frac{d}{dz}[e^{-z}\varphi(z, z_i)],$$

d'où, en multipliant par dz et intégrant entre o et z_k,

$$(1)_k^i = \varphi(z_0, z_i) - e^z \cdot \varphi(z_k, z_i).$$

Il suffit dès lors de poser

$$(5) \qquad u_h^i = U_h^i \varphi(z_h, z_0) + \dots + U_h^n \varphi(z_h, z_n)$$

pour obtenir la formule

$$(6) \qquad m_k^i = u_0^i - e^{-z_k} u_k^i,$$

due à M. Hermite et dont dépend toute la suite de cette étude.

Les quantités u_h^i sont des fonctions entières et à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$; leur expression (5) montre en outre que leur déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_0^0 & \dots & u_n^0 \\ u_0^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0^n & \dots & u_n^n \end{vmatrix}$$

est égal au produit des déterminants (3) et (4); d'où résulte l'égalité

$$\Delta = \delta^{2m}.$$

3. Enfin, pour terminer ce travail préparatoire, nous allons montrer que *l'intégrale m_k^i tend vers zéro lorsque m croît indéfiniment.*

Si l'on désigne, en effet, par λ' la longueur du chemin d'intégration adopté pour le calcul de m_k^i, et par μ' et ν' les modules maxima de $zf(z)$ et de $e^{-z}(z-z_i)^{-1}$ le long de ce chemin, on a évidemment

$$\text{mod}\, m_k^i < \frac{\mu'^m . \nu' . \lambda'}{1.2\ldots(m-1)}.$$

Par suite, si λ, μ, ν sont les plus grandes valeurs de λ', μ', ν' pour toutes les valeurs de k et de i, toutes les intégrales m_k^i auront un module inférieur à

$$\left[\frac{\mu^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\right]\mu\nu\lambda,$$

or λ, μ, ν sont des nombres finis et indépendants de m, et l'on sait d'ailleurs que la fraction mise entre parenthèses peut, pour une valeur assez grande de l'entier m, devenir inférieure à toute quantité donnée.

Théorèmes de M. Lindemann.

4. Supposons : 1° que n soit de la forme pq, p et q étant deux entiers positifs quelconques; 2° que $z_1, \ldots, z_p$ soient les racines d'une équation irréductible de la forme

$$(\beta) \qquad \psi(z) = z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p = 0,$$

$b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant des nombres entiers réels ou imaginaires; 3° que l'on ait pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$ de l'indice ν

$$(7) \qquad z_{p+\nu} = 2z_\nu, \quad z_{2p+\nu} = 3z_\nu, \quad \ldots, \quad z_{(q-1)p+\nu} = qz_\nu.$$

On aura, par la formule (6),

$$e^{z_\nu} m_\nu^i = e^{z^\nu} u_0^i - u_\nu^i,$$
$$e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i = e^{z_{p+\nu}} u_0^i - u_{p+\nu}^i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i = e^{z_{(q-1)p+\nu}} u_0^i - u_{(q-1)p+\nu}^i,$$

d'où, en multipliant respectivement par des nombres $N_1, N_2, \ldots, N_q$, supposés entiers réels ou imaginaires, mais différents de zéro, puis ajoutant et ayant égard aux relations (7),

$$\begin{aligned} N_1 \Sigma e^{z_\nu} m_\nu^i + N_2 \Sigma e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i + \ldots + N_q \Sigma e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i \\ = u_0^i [N_1 \Sigma e^{z_\nu} + N_2 \Sigma e^{2z_\nu} + \ldots + N_q \Sigma e^{qz_\nu}] \\ - N_1 \Sigma u_\nu^i - N_2 \Sigma u_{p+\nu}^i - \ldots - N_q \Sigma u_{(q-1)p+\nu}^i, \end{aligned}$$

toutes les sommes Σ étant prises de $\nu = 1$ à $\nu = p$.

L'existence d'une relation telle que

$$\text{(I)} \qquad N_0 + N_1 \Sigma e^{z_\nu} + N_2 \Sigma e^{2z_\nu} + \ldots + N_q \Sigma e^{qz_\nu} = 0$$

entraînerait donc les $n+1$ relations que l'on déduit de

$$(8) \left\{ \begin{aligned} N_1 \Sigma e^{z_\nu} m_\nu^i + N_2 \Sigma e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i + \ldots + N_q \Sigma e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i \\ = -[N_0 u_0^i + N_1 \Sigma u_\nu^i + N_2 \Sigma u_{p+\nu}^i + \ldots + N_q \Sigma u_{(q-1)p+\nu}^i], \end{aligned} \right.$$

en y faisant $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. L'impossibilité de la relation (I) sera donc démontrée, si l'on prouve l'impossibilité du système des $(n+1)$ équations (8).

A cet effet, nous ferons d'abord les remarques suivantes, qui résultent de la composition des u_h^i et de la forme entière des coefficients de l'équation qui a les z_k pour racines.

1° Le second membre de la première des équations (8) (relative à $i = 0$) est un nombre entier; car ce second membre, qui est une fonction entière et à coefficients entiers des z_k, est en outre une fonction symétrique de ces racines; vu que, si l'on échange les indices x et y qu'on suppose choisis parmi $1, 2, \ldots, p$, u_x^0 s'échange avec u_y^0, $z_{x+\lambda p}$ avec $z_{y+\lambda p}$, et $u_{x+\lambda p}^0$ avec $u_{y+\lambda p}^0$;

2° Les seconds membres des autres équations (8) ne font que s'échanger entre eux par l'effet de l'échange mutuel des z_k; car, si l'on échange z_x et z_y, $u_{l+\lambda p}^x$ s'échange avec $u_{l+\lambda p}^y$ tant que l diffère de x et de y, et en outre

$u^{r}_{y+\lambda p}$ s'échange avec $u^{y}_{x+\lambda p}$ et $u^{x}_{x+\lambda p}$ avec $u^{y}_{y+\lambda p}$. Ces seconds membres sont d'ailleurs des fonctions entières et à coefficients entiers des z_i; si donc on considère l'équation

$$\omega^{n+1} + A_1 \omega^n + \ldots + A_n = 0,$$

qui aurait les seconds membres des équations (8) pour racines, les coefficients $A_1, \ldots, A_n$ étant des fonctions entières et symétriques de ces seconds membres seront des nombres entiers.

Mais les premiers membres des équations (8) tendent vers zéro quand m croît indéfiniment; donc il en est de même alors de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et, comme ce sont des nombres entiers, il faut qu'à partir de certaines valeurs de m et pour toutes les valeurs plus grandes de m on ait rigoureusement $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $\ldots$, $A_n = 0$. Donc pour ces mêmes valeurs de m les seconds membres des équations (8) devraient s'évanouir, et, par suite, tous les déterminants d'ordre $(q+1)$ déduits du tableau des coefficients des $N_0, N_1, \ldots, N_q$ dans les seconds membres des équations (18) devraient être nuls; il en serait donc de même du déterminant Δ et par conséquent aussi de δ, puisque $\Delta = \delta^{2m}$.

Mais le déterminant δ est, comme on sait, égal au produit de toutes les différences $\pm(\alpha z_i - \beta z_h)$, lorsqu'on donne à i et h toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$, et à α et β toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q$ (à condition cependant de ne pas faire à la fois α et β nuls); δ ne pourrait donc être nul que s'il y avait entre deux racines z_i et z_h une relation de la forme $\alpha z_i - \beta z_h = 0$; mais alors l'équation $\psi(z) = 0$ et l'équation

$$z^p + \frac{\beta}{\alpha} b_1 z^{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 b^2 z^{n-2} + \ldots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p b_p = 0$$

auraient une racine commune, tandis que $\psi(z)$ a été supposé irréductible.

On a donc le théorème suivant :

Si $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont les racines d'une équation irréductible de la forme (β) à coefficients entiers $b_1, \ldots, b_n$ réels ou imaginaires, il ne peut exister, entre les fonctions symétriques,

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma e^{z_\nu} = e^{z_1} + e^{z_2} + \ldots + e^{z_p}, \\ \Sigma e^{2z_\nu} = e^{2z_1} + e^{2z_2} + \ldots + e^{2z_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma e^{qz_\nu} = e^{qz_1} + e^{qz_2} + \ldots + e^{qz_p}, \end{cases}$$

où q désigne un nombre entier et positif quelconque, aucune relation telle que (1), c'est-à-dire aucune relation linéaire dont les coefficients $N_0, N_1, \ldots, N_q$ soient entiers réels ou imaginaires et différents de zéro.

En particulier, on ne saurait avoir

$$N_0 + N_1 + (e^{rz_1} + e^{rz_2} + \ldots + e^{rz_n}) = 0,$$

r étant un entier positif quelconque ; et par conséquent, *sous les conditions admises, aucune des fonctions symétriques*

$$e^{rz_1} + e^{rz_2} + \ldots + e^{rz_n}$$

ne saurait être égale à un nombre rationnel.

5. Les propositions précédentes peuvent s'étendre aux fonctions symétriques

$$(10)\quad \begin{cases} \Sigma e^{z_1}, & \Sigma e^{z_1+z_2}, & \Sigma e^{z_1+z_2+z_3}, & \ldots, & \Sigma e^{z_1+z_2+\ldots+z_p} \\ \Sigma e^{rz_1}, & \Sigma e^{r(z_1+z_2)}, & \Sigma e^{r(z_1+z_2+z_3)}, & \ldots, & \Sigma e^{r(z_1+z_2+\ldots+z_p)}. \end{cases}$$

En effet, supposons d'abord que les nombres qui figurent comme exposants de e soient tous différents les uns des autres et différents de zéro. L'existence d'une relation linéaire à coefficients entiers $N_0, N_1, N_2, \ldots$ entre les quantités (10) conduirait alors à un système d'équations entièrement analogue au système (8) et dont

on mettrait l'impossibilité en évidence par un raisonnement pareil à celui du n° 3.

Si l'hypothèse ci-dessus n'est pas remplie, admettons d'abord que dans l'une des fonctions (10), que nous désignons par Σe^{Z}, plusieurs des exposants Z soient égaux entre eux, et considérons une relation de la forme

$$(\text{II}) \qquad o = N_0 + N_1 \Sigma e^{Z}.$$

Toutes les quantités Z peuvent alors être réparties en plusieurs groupes

$$Z_1,\ Z'_1,\ Z''_1,\ \ldots;\ \ Z_2,\ Z'_2,\ Z''_2,\ \ldots;\ \ \ldots,$$

tels que les quantités qui forment un même groupe soient racines d'une équation irréductible à coefficients rationnels et ne fassent que s'échanger entre elles quand on échange les racines z_k. Or le succès du raisonnement appliqué dans le n° 3 à la relation (I) était dû précisément à ce qu'il n'intervenait dans chaque somme séparée que des exposants de e s'échangeant entre eux par suite de l'échange des z_k. Nous pouvons donc ici conclure immédiatement à l'impossibilité d'une équation de la forme

$$o = N_0 + N_1 \Sigma e^{Z_1} + N_2 \Sigma e^{Z_2} + \ldots$$

et, par suite, de la relation (II) qui en est un cas particulier. Si, de plus, une des quantités Z était nulle, cela équivaudrait à un changement dans la valeur de N_0; mais alors le raisonnement serait en défaut, à moins que tous les exposants du second membre de (II) ne s'évanouissent en même temps. Si l'équation qui a les z_k pour racines est irréductible, le cas d'exception que nous signalons ne peut se présenter que pour l'exposant de la fonction

$$(11) \qquad e^{Z} = e^{r(z_1 + z_2 + \ldots + z_p)},$$

lorsque le coefficient b_1 de z^{p-1} dans l'équation $\psi(z) = o$

est nul. Considérons maintenant, au lieu de (II), une équation linéaire dans laquelle figurent plusieurs des fonctions (10); on pourra encore grouper les exposants de telle sorte que chacun des nombres N multiplie une somme telle que les exposants de e qui appartiennent aux termes de cette somme soient les racines d'une équation irréductible, et l'on répétera ce qui a été dit ci-dessus à propos de l'équation (II).

Donc : *Aucune des fonctions symétriques* (10) *ne peut être égale à un nombre rationnel;* et plus généralement, *entre les fonctions* (10), *il ne peut exister aucune relation linéaire à coefficients rationnels; à moins que l'équation* $\psi(z) = 0$ *ne soit privée de second terme, auquel cas une fonction symétrique des quantités* (11) *peut être égale à un nombre rationnel.*

6. La première série des quantités (10) n'est autre que la suite des coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_p$ de l'équation

$$(12) \qquad V^p - M_1 V^{p-1} + M_2 V^{p-2} - \ldots \pm M_p = 0,$$

qui a pour racines $e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_p}$.

D'après ce qui vient d'être dit, ces coefficients ne peuvent être rationnels, sauf M_p pour $b_1 = 0$, et il ne saurait exister entre eux aucune relation linéaire à coefficients rationnels. Mais si l'une des racines de (12), c'est-à-dire l'une des quantités $e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_p}$ était rationnelle, sa substitution à la place de V dans (12) établirait précisément une relation à coefficients rationnels entre $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Donc : *Si z est une équation irréductible de la forme* (β), e^z *ne peut être un nombre rationnel.*

Or on a $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$; donc $\pi\sqrt{-1}$ ne saurait être racine d'une équation irréductible de la forme (β). D'ailleurs, on peut ramener toute équation à coefficients

rationnels à la forme (β), en prenant pour inconnue pz, au lieu de z, p étant un nombre entier convenablement choisi. Donc enfin :

Le nombre π ne saurait être racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels (réels ou imaginaires).

SUR LES ANTICAUSTIQUES PAR RÉFLEXION DE LA PARABOLE, LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PARALLÈLES;

PAR M. LAGUERRE.

1. J'appelle *bissectrice* de deux semi-droites données la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des cycles tangents à ces demi-droites; la droite menée par leur point de rencontre et perpendiculairement à la bissectrice sera désignée sous le nom de *bissectrice impropre.*

Deux demi-droites sont symétriques par rapport à leur bissectrice impropre; je dirai qu'elles sont *anti-symétriques* par rapport à leur bissectrice.

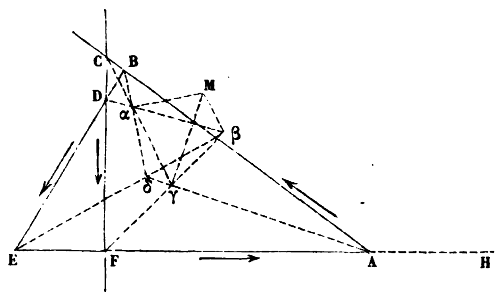
Ces définitions étant posées, je m'appuierai sur les lemmes suivants :

LEMME I. — *Quatre semi-droites étant données, si l'on considère trois à trois ces semi-droites, on obtient quatre triangles; les centres des cycles inscrits dans ces triangles sont sur un même cercle.*

Considérons en effet (*fig.* 1) les quatre semi-droites AB, BE, EA et CF. Les bissectrices des côtés du triangle ABC le coupent au point δ, celle du triangle BCD au point α, celles du triangle EDF au point β et celles du

triangle CFA au point γ. Pour établir que ces quatre

Fig. 1.



points sont sur une même circonférence, il suffit d'éta-
bl irque l'angle $\alpha\delta\beta$ est égal à l'angle $\alpha\gamma\beta$.

On a évidemment

$$\widehat{\alpha\delta\lambda} = \widehat{BE\delta} + \widehat{EB\delta} = \tfrac{1}{2}\widehat{BEA} + \tfrac{1}{2}\widehat{EBA} - \tfrac{1}{2}\widehat{BAH};$$

d'autre part, on a

$$\widehat{\alpha\gamma\beta} = \widehat{FC\gamma} + \widehat{CF\gamma} = \tfrac{1}{2}\widehat{FCA} + \tfrac{1}{2}\widehat{CFA} = \tfrac{1}{2}\widehat{BAH}.$$

La proposition est donc démontrée.

2. Sur la circonférence $\alpha\gamma\beta\delta$, considérons le point M diamétralement opposé au point δ, on voit que les droites $M\alpha$, $M\beta$ et $M\gamma$ sont respectivement perpendiculaires aux droites $B\alpha$, $E\beta$ et $A\gamma$. Or α est le centre du cycle qui touche les semi-droites AB, BE et CF, β le centre du cycle qui touche les semi-droites BE, AE et CF, et γ le centre du cycle qui touche les semi-droites AE, AB et CF. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Lemme II. — *Étant données quatre semi-droites* D, D′, D″ *et* Δ, *soient* α, α', α'' *les centres des cycles inscrits respectivement dans les triangles déterminés par les*

semi-[illegible] ([illegible], D″, Δ), (D″, D, [illegible]) et (D, D′, Δ); [illegible]*signons par* β *le point de rencontre de* D′ *et* D″, *par* β′ *le point de rencontre de* D″ *et de* D *et enfin par* β″ *le point de rencontre de* D *et* D′.

Cela posé, les droites menées par les points α, α′, α″ *et perpendiculaires respectivement aux droites* αβ, α′ β′ α″ β″ *concourent en un même point.*

3. Considérons maintenant deux semi-droites fixes A et Δ et une semi-droite mobile B assujettie à la condition suivante, à savoir que p désignant le point de rencontre de A et de Δ, q le centre du cycle inscrit dans le triangle formé par les semi-droites A, B et Δ, la droite menée par q perpendiculairement à pq passe par un point fixe F.

La semi-droite B enveloppera dans son mouvement une courbe parfaitement déterminée; elle est de l'espèce de celles que j'ai appelées *hypercycles* et de la troisième classe; c'est donc un *hypercycle cubique*. Dans tout le cours de cette Note, quand il n'y aura aucune confusion à craindre, je la désignerai simplement sous le nom d'*hypercycle;* comme je le montrerai plus tard, le point fixe F est le foyer de cette courbe ([1]).

4. Un hypercycle étant ainsi défini par les deux semi-droites A et Δ, considérons une autre tangente quelconque à la courbe C; en désignant par r le point de rencontre de A et de C, par s le centre du cycle tangent aux semi-droites A, C et Δ, il suit de la définition de la courbe que la droite menée par s perpendiculairement à rs passe par le foyer de la courbe. Soient maintenant

---

([1]) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les hypercycles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 20 mars ,3, 10 et 24 avril 1882).

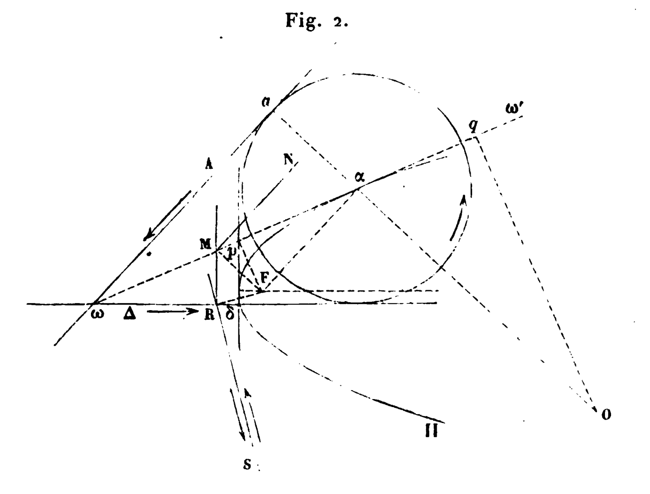
α le point de rencontre des tangentes C et B, β le centre du cycle tangent à B, C et Δ, il résulte du lemme II que la droite menée par β perpendiculairement à $\beta\alpha$ passe également par le foyer F.

Nous pouvons donc énoncer cette propriété fondamentale.

Théorème I. — *Étant données deux tangentes quelconques de l'hypercycle, considérons le centre du cycle qui touche ces deux tangentes et la semi-droite* Δ; *les droites, qui joignent ce centre au foyer de la courbe et au point de rencontre des tangentes, sont perpendiculaires entre elles.*

5. Considérons une tangente A(*fig.* 2) à un hypercycle H et a le point où elle touche la courbe; la tangente infiniment voisine A′ passe par le point A et la bissectrice de

Fig. 2.



deux semi-droites A et A′ est la normale menée au point a; soit α le point où cette normale rencontre la bissectrice des semi-droites A et Δ; d'après le théorème pré-

cédent, la droite Fα est perpendiculaire à la normale et, par suite, parallèle à A. D'où la proposition suivante :

Étant donnée une tangente A *à l'hypercycle* H, *que par le foyer* F *de la courbe on mène une parallèle à* A, *et que l'on prenne son point de rencontre* α *avec la bissectrice des semi-droites* A *et* Δ ; *que du point* α *on abaisse ensuite une perpendiculaire de la tangente* A, *le pied* a *de cette perpendiculaire est le point de contact de* A *avec la courbe.*

6. La semi-droite Δ est tangente à la courbe. Supposons en effet (*fig.* 2) l'hypercycle défini par la semi-droite Δ et une tangente quelconque A. Soit $\omega\omega'$ la bissectrice des demi-droites A et Δ; abaissons du point F une perpendiculaire Fp sur $\omega\omega'$, puis, du point p, une perpendiculaire $p\delta$ sur Δ. Si nous imaginons une semi-droite Δ' infiniment voisine de Δ et passant par le point d, la bissectrice de Δ et de A est la droite $\omega\omega'$, le centre du cycle tangent à A, Δ et Δ' est évidemment le point p et, comme pF est perpendiculaire à $p\omega$, il résulte du théorème I que Δ' (et par suite Δ) est tangente à l'hypercycle; son point de contact est le point A.

Je dirai que Δ est la tangente principale de la courbe.

Dans la démonstration précédente, A est une tangente quelconque de l'hypercycle ; lorsque cette tangente varie, on voit que la bissectrice $\omega\omega'$ enveloppe une parabole Π ayant F pour foyer, et $p\delta$ pour tangente au sommet : cela résulte immédiatement de ce que l'angle F$p\omega$ est un angle droit.

Il est aisé de voir que la droite $\omega\omega'$ touche la parabole Π au point α; de ce point, comme centre, décrivons un cycle touchant à la fois Δ et A ; son enveloppe, lorsque A se déplace tangentiellement à l'hypercycle, et que le point α décrira la parabole Π, se compose de la semi-

droite Δ et de l'hypercycle H : on peut donc dire que *le lieu des centres des cycles, qui touchent l'hypercycle et la tangente fondamentale* Δ, *est la parabole* Π.

En d'autres termes :

L'hypercycle H *est une anticaustique* (¹) *par réflexion de la parabole* Π, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe de cette parabole.*

Remarque. — On voit que la parabole Π est le lieu des points α; il en résulte que *la parabole* Π *est le lieu des projections du foyer* F *sur les normales à l'hypercycle.*

7. *Tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point situé sur une tangente donnée.*

Soient un hypercycle H défini par son foyer F, sa tangente principale Δ et une tangente quelconque A; soit, de plus, $\omega\omega'$ la bissectrice des semi-droites A et Δ. Étant pris sur A un point quelconque M, si nous imaginons une tangente quelconque menée de ce point à la courbe, il suit du théorème I que, du centre du cycle inscrit dans cette tangente, A et Δ, on doit voir sous un angle droit le segment MF. Soit MF comme diamètre décrivant un cercle, et soient α, β les points où ce cercle coupe la bissectrice $\omega\omega'$; il est clair, d'après ce qui précède, que les tangentes que, du point M, on peut mener à la courbe (et qui sont distinctes de A), sont les *antisymétriques* de A relativement aux droites $M\alpha$ et $M\beta$.

Remarque I. — Il résulte de la construction précédente que par chaque point du plan passent trois tan-

---

(¹) Dans la suite de cette Note, chaque fois que je parlerai d'une anticaustique, sans rien mentionner de plus, je supposerai expressément que les rayons incidents sont parallèles.

gentes à la courbe : l'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe.

Remarque II. — Par le foyer F, menons une droite qui soit parallèle à la bissectrice $\omega\omega'$ et qui rencontre A au point p; soit q le point symétrique p relativement au point ω, intersection de A et de Δ. Si, sur qF comme diamètre, nous décrivons un cercle rencontrant la bissectrice $\omega\omega'$ aux points α et β, le centre de ce cercle est évidemment sur cette bissectrice; l'angle $\alpha q \beta$ est par conséquent droit, et les deux tangentes, que du point q on peut mener à l'hypercycle (indépendamment de la tangente A), sont des semi-droites opposées : cela résulte immédiatement de la construction donnée ci-dessus.

Ces deux tangentes sont distinctes, ainsi que leurs points de contact; la droite qui correspond à ces deux semi-droites opposées est donc une *tangente double* de la courbe; mais elle doit être considérée comme une *tangente double apparente* (1).

L'hypercycle, étant de la troisième classe et ayant une tangente double, est du quatrième degré.

Remarque III. — Supposons que le cercle décrit sur MF comme diamètre soit tangent à la bissectrice $\omega\omega'$; les points α et β étant confondus, il en est de même des

---

(1) Au point de vue où nous sommes placés ici, une semi-droite est tangente double d'une courbe, si, en deux de ses points, elle a même direction que cette courbe; c'est alors une *tangente double effective*. Mais, si une droite est telle, qu'en la prenant d'abord dans un sens déterminé elle touche la courbe et qu'elle la touche encore en la prenant dans le sens inverse, on a une *tangente double apparente*.

Lorsqu'on effectue une transformation par directions réciproques, une tangente double effective a pour transformée une tangente double effective, tandis qu'une tangente double apparente (qui résulte de la superposition de deux tangentes opposées) a pour transformées deux tangentes ordinaires distinctes.

droites $M\alpha$ et $M\beta$; par suite, les tangentes menées du point M à la courbe (et distinctes de A) sont confondues. Le point M est donc situé sur la courbe; d'où la conclusion suivante :

Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la tangente* A; *par les deux points* F *et* P *on peut mener deux cercles tangents à la bissectrice de* A *et de la tangente fondamentale, les points où ces cercles coupent* A *sont les deux points (distincts du point de contact) où cette tangente coupe l'hypercycle.*

8. *Tangente parallèle à une semi-droite donnee* — L'hypercycle étant défini comme précédemment par son foyer F, la tangente fondamentale Δ et une tangente quelconque A, proposons-nous de mener à cette courbe une tangente parallèle à une semi-droite donnée D.

Construisons à cet effet la bissectrice (D, A) ([1]) et menons par le foyer F une perpendiculaire à (P, A); par le point β, où cette perpendiculaire coupe la bissectrice (A, Δ), menons une parallèle à (D, A) rencontrant au point α la tangente A. Il résulte du théorème I que l'antisymétrique de A relativement à la droite $\alpha\beta$ est une tangente à la courbe qui est évidemment parallèle à la semi-droite donnée D.

On peut donc mener, une tangente et une seule, qui soit parallèle à une semi-droite donnée; comme on peut mener également une tangente parallèle à la semi-droite opposée, il en résulte que, par un point situé à l'infini, on peut généralement mener deux tangentes à la courbe.

([1]) Ici et comme dans tout ce qui suit, je désigne, pour abréger, par la notation (P, Q) la bissectrice de deux semi-droites données P et Q.

La courbe étant de troisième classe, on voit qu'elle est nécessairement tangente à la droite de l'infini.

Deux cas particuliers sont à remarquer : si la droite donnée est antiparallèle à Δ, les bissectrices (D, A) sont (Δ, A) perpendiculaires, et le point β est répété à l'infini. La tangente antiparallèle à Δ étant rejetée à l'infini, on voit que le point de contact de l'hypercycle avec la droite de l'infini est sur Δ; en d'autres termes :

La tangente principale est la tangente que l'on peut mener à la courbe par le point où elle touche la droite de l'infini.

Considérons, en second lieu, le cas où D est une direction isotrope; je ferai remarquer à ce sujet qu'*une semi-droite isotrope doit être considérée comme se confondant avec son opposée* (1).

Si donc on considère un des ombilics du plan (c'est-à-dire des deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan), on voit que par ce plan on ne peut mener à la courbe qu'une tangente distincte de la droite de l'infini : d'où il résulte que ce point est situé sur la courbe.

L'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe et du quatrième degré, tangente à la droite de l'infini et passant par les ombilics. Elle a un seul foyer, qui est un foyer singulier; la construction donnée ci-dessus montre aisément que ce foyer est le point F (2).

Réciproquement, toute courbe de la troisième classe et du quatrième degré qui touche la droite de l'infini et passe par les ombilics du plan est un hypercycle.

---

(1) On voit qu'il n'y a pas besoin de distinguer le sens dans lequel est décrite une droite isotrope ; ainsi *droite isotrope* et *semi-droite isotrope* ont exactement la même signification.

(2) Il suffit de remarquer que la bissectrice d'une semi-droite donnée et d'une droite isotrope est cette droite isotrope elle-même.

9. Voici encore une conséquence de la construction donnée ci-dessus. Une tangente A étant donnée, cherchons à déterminer la tangente A′ parallèle à la direction opposée. La bissectrice (A, A′) est une droite parallèle à A, et la perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette droite rencontre la bissectrice $\omega\omega'$ au point M (*fig.* 2) : d'où il résulte que A′ est l'antisymétrique A par rapport à la droite MN menée par le point M parallèlement à A.

Or l'enveloppe de cette droite est aisée à trouver ; l'angle MFα étant droit, le point M décrit la directrice de la parabole Π, et l'angle NMF étant également droit, MN enveloppe une parabole Π′, qui a pour foyer F et pour tangente au sommet la directrice MR de la parabole Π.

Je ferai remarquer que la droite RS, menée par le point R perpendiculairement à RF, est la tangente double de la courbe.

10. L'hypercycle étant défini comme enveloppe d'une semi-droite mobile est, comme le cycle une *courbe de direction;* je veux dire par là qu'en chacun de ses points la tangente est déterminée de position et de direction.

Considérons un cycle C et le cercle K déterminé par ce cycle ; le cercle K étant de seconde classe et l'hypercycle de la troisième, ces deux courbes ont en commun six tangentes dont la direction est déterminée, puisqu'elles touchent l'hypercycle. De ces six semi-droites, trois seulement sont tangentes à C, les autres étant tangentes au cycle opposé.

Ainsi, *un cycle et un hypercycle ont trois tangentes communes.*

11. *Détermination des tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle.*— Considérons un cycle C qui touche une tangente A à l'hyper-

même du cycle; mais une courbe algébrique, prise au hasard, n'est pas une courbe de direction.

Étant donnée une courbe algébrique K de classe n, si, en la supposant décrite dans un certain sens, on peut la transformer en une courbe de direction K_0, il faut que, étant donné un cycle quelconque C, des $2n$ tangentes communes à K et à C, n soient seulement des tangentes effectives à K_0, les n autres étant des tangentes apparentes.

De là résulte que l'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit, par l'extraction d'une simple racine carrée, se ramener à la résolution des deux équations du degré n; et, comme (en coordonnées rectangulaires) l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2,$$

il en résulte que l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme

$$F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v),$$

F et Φ désignant deux fonctions rationnelles de u et de v.

16. Lorsque l'équation d'une courbe algébrique K du degré n n'est pas de la forme que je viens d'indiquer (telle est, par exemple, une conique quelconque différente du cercle), pour la transformer en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, et comme le résultat de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la courbe K.

Une telle courbe doit être considérée comme double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes

qui sont des semi-droites opposées, et, au point de vue où nous sommes placés, elle est de la classe $2n$.

17. Étant données une courbe algébrique quelconque K et une semi-droite Δ, considérons les cycles qui, ayant leur centre sur K, sont tangents à Δ; ils enveloppent évidemment une courbe de direction G, qui est une anticaustique de K, les rayons incidents étant perpendiculaires à Δ.

Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction; réciproquement, étant donnée une courbe de direction quelconque G, elle est une anticaustique d'une infinité de courbes algébriques que l'on déterminera de la façon suivante.

Étant prises arbitrairement une semi-droite Δ et une tangente quelconque T à la courbe G, que l'on construise la bissectrice (T, Δ); lorsque T se déplace tangentiellement à G, la droite (T, Δ) enveloppe une courbe algébrique K, qui est le lieu des centres des cycles qui touchent à la fois Δ et la courbe G.

Si la courbe G est une courbe double, en chaque point M de cette courbe, on peut mener deux tangentes opposées, et si N désigne le point où elles rencontrent Δ, par N passent deux bissectrices rectangulaires entre elles, dont l'enveloppe est la courbe K.

Dans ce cas, l'enveloppe des cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K est la *courbe double* G, chaque point M de G étant le point de contact de deux cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K; ou, si l'on veut encore, chaque point de G étant situé sur deux rayons réfléchis sur K.

18. On peut encore énoncer les résultats qui précèdent sous la forme suivante : G désignant une courbe

algébrique, traçons dans le plan une droite arbitraire D, menons une tangente T à G et construisons les deux bissectrices rectangulaires des droites T et D; cela posé, lorque T se déplace tangentiellement à la courbe, ces bissectrices enveloppent une autre courbe. Si cette dernière courbe se décompose en deux autres, on peut transformer la courbe G en une courbe de direction en donnant en chacun de ses points une direction à la tangente. On retrouverait ainsi la condition analytique que j'ai donnée plus haut, à savoir que l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe de direction est de la forme $F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\Phi^2(u, v)$.

Les courbes parallèles à une courbe de direction et l'enveloppe de ses normales sont également des courbes de direction; il en est de même des caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles.

19. Considérons une courbe de direction G qui est l'enveloppe des cycles dont les centres décrivent la courbe K, tandis qu'ils demeurent tangents à une semi-droite Δ.

Effectuons une transformation par semi-droites réciproques; soient G_0 la transformée de G, et Δ_0 la semi-droite transformée de Δ. G_0 peut être considéré comme l'enveloppe de cycles tangents à Δ_0, et dont les centres parcourent une courbe K_0.

Il est aisé d'établir que K_0 est une transformée homographique de K, la transformation étant de telle nature que la droite de l'infini se correspond à elle-même.

Prenons en effet pour axe des x l'axe de la transformation, et pour axe des y une droite perpendiculaire. Soient x, y les coordonnées du centre d'un cycle tangent à Δ et à G, et r son rayon; soient X, Y les coordonnées

du cercle transformé et R son rayon. On aura les formules suivantes ([1]) :

$$Y = x, \quad Y - y = \alpha(R - r), \quad Y + y = \frac{1}{\alpha}(R + r);$$

en éliminant R entre les deux dernières relations, il vient

$$Y = \frac{(\alpha^2 - 1)y - 2\alpha r}{\alpha^2 + 1}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle de rayon r demeure tangent à une semi-droite fixe du plan, on voit que, *en grandeur et en signe*, r est exprimé par une fonction linéaire de x et de y.

On a donc une relation de la forme

$$Y = Ax + By + C,$$

où A, B, C désignent des constantes, et cette formule, jointe à la formule $X = x$, démontre la proposition énoncée.

Une transformation homographique, qui conserve la droite de l'infini, transformant une conique en conique et une parabole en parabole, il en résulte qu'une anticaustique de conique se transforme, par une transformation par directions réciproques, en une anticaustique de conique, et qu'un hypercycle (qui est une anticaustique de parabole) a pour transformée un autre hypercycle ([2]).

([1]) Voir le *Traité de Géométrie*, de MM. Rouché et de Comberousse, 5e édition, p. 270, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 550.

([2]) Sur ce point et sur d'autres propriétés de l'hypercycle, voir ma Note *Sur les hypercycles*, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 20 et 27 mars, 3, 10 et 24 avril 1882.

20. *Un hypercycle est déterminé quand on se donne cinq de ses tangentes.* — Cinq tangentes A, B, C, D, E étant en effet données, que l'on construise, par exemple, les quatre bissectrices (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), et la parabole P tangente à ces quatre droites; il est clair, d'après ce qui précède, que l'hypercycle est l'enveloppe des cycles qui touchent A, et dont le centre décrit P; son foyer est du reste le foyer de P.

La proposition précédente signifie qu'il y existe un seul hypercycle touchant *cinq semi-droites données*, mais il y existe seize hypercycles touchant *cinq droites données*. Ayant en effet attribué un sens arbitraire à l'une des droites pour la transformée en semi-droites, on peut attribuer à chacune des quatre autres un sens arbitraire, ce qui donne lieu à seize combinaisons différentes.

21. *Indépendamment de la droite de l'infini, deux hypercycles quelconques* H *et* H' *ont quatre tangentes communes.* — Soient, en effet, H_0 la courbe H' considérée indépendamment de son sens; H_0 et H, étant toutes les deux de troisième classe, ont neuf tangentes communes. Abstraction faite de la droite de l'infini, il en reste huit autres qui sont tangentes soit à H, soit à la courbe H_1 opposée à H. Deux hypercycles ne peuvent d'ailleurs, d'après le théorème précédent, avoir plus de quatre tangentes communes; des huit tangentes considérées, quatre sont donc tangentes à H et quatre tangentes à H_1, ce qui démontre la proposition énoncée.

22. *Faisceaux d'hypercycles.* — Je dirai que l'ensemble des hypercycles qui touchent quatre semi-droites données constitue un faisceau.

Il est clair, d'après ce qui précède, que, parmi les

hypercycles d'un faisceau, il n'y en a qu'un qui touche une semi-droite donnée; on prouvera facilement qu'il y en a quatre qui passent par un point donné.

Le lieu des foyers des hypercycles du faisceau déterminé par quatre semi-droites données A, B, C, D est le cercle qui contient (lemme I) les centres des cycles inscrits dans les triangles que l'on détermine en considérant trois à trois les semi-droites données.

Considérons en effet les bissectrices (A, B), (A, C) et (A, D); on voit que les foyers des hypercycles du faisceau sont les foyers des paraboles tangentes à ces trois droites; or, d'après un théorème connu, le lieu de ces foyers est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites, d'où la proposition énoncée.

23. *Hypercycles exceptionnels.* — Un point d à l'infini étant défini par un système (D) de semi-droites parallèles entre elles, on peut considérer l'ensemble du point d et d'un cycle quelconque C comme constituant un hypercycle. Les tangentes que l'on peut, d'un point quelconque M du plan, mener à cet hypercycle exceptionnel se composent des tangentes menées du point M au cycle et de la semi-droite menée par M parallèlement au système (D).

Étant donné un tel hypercycle exceptionnel (d, C), si l'on mène à C une tangente antiparallèle au système (D) [1], cette tangente est la tangente principale du cycle exceptionnel, et la droite correspondante en est la tangente double.

C'est ce que l'on verra facilement sur la *fig.* 2, en

[1] Je rappellerai que deux semi-droites sont dites *antiparallèles* lorsque, les droites qu'elles déterminent étant parallèles, elles sont dirigées en sens inverse.

supposant que le foyer F se rapproche indéfiniment de la bissectrice $\omega\omega'$ et vient se placer sur cette droite, auquel cas l'hypercycle se réduit à un cycle et à un point à l'infini.

24. Un faisceau déterminé par quatre semi-droites A, B, C, D renferme quatre cycles exceptionnels, à savoir :

Celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans A, B, C et le point à l'infini sur D, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans B, C, D et le point situé à l'infini sur A, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans C, D, A et le point situé à l'infini sur B, et enfin celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans D, A, B et le point à l'infini sur C.

La considération de ces cycles exceptionnels est d'une grande importance dans la théorie des faisceaux d'hypercycles, théorie sur laquelle j'aurai occasion de revenir.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES, DU DEUXIÈME ET DU TROISIÈME ORDRE ;

PAR M. A. PICART.

---

1. Laplace a donné une méthode, qu'on pourrait appeler méthode *par cascades*, pour intégrer les équations linéaires du deuxième ordre ramenées préalablement à la forme

$$S + Pp + Qq = V.$$

Legendre a montré ensuite qu'on pourrait appliquer

directement la méthode à l'équation complète

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq = V.$$

Mais ses formules de transformation n'ont été obtenues qu'après coup comme extension de celles de Laplace, tandis qu'on peut les déduire immédiatement de l'équation même par le procédé suivant.

Nous avions cru notre méthode complètement nouvelle, mais, en parcourant le Chapitre du grand Traité de Lacroix, relatif aux équations différentielles partielles, nous avons vu que Legendre, voulant généraliser le procédé de Laplace, avait déjà été conduit à la même transformation. Seulement nous croyons pouvoir ajouter, d'après les indications de Lacroix, que sa méthode, basée sur une identification, et par conséquent indirecte, diffère complètement de la nôtre, qui tire sa transformation en quelque sorte du fond même de l'équation différentielle.

2. Soit l'équation linéaire du deuxième ordre à deux variables indépendantes

$$(1) \qquad Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = V.$$

On peut la mettre sous la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & R\frac{dp}{dx} + \alpha\frac{dq}{dx} + (S-\alpha)\frac{dp}{dy} + T\frac{dq}{dy} + \lambda\frac{dr}{dx} \\ & \qquad + \mu\frac{dz}{dy} + (P-\lambda)p + (Q-\mu)q + Zz = V, \end{aligned} \right.$$

α, λ, μ étant trois indéterminées.

Posons

$$(3) \qquad \frac{R}{S-\alpha} = \frac{\alpha}{T} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{k}.$$

Ces équations détermineront α et μ; λ seul restera indéterminé; α sera donné par l'équation du deuxième degré

$$(4)\qquad \alpha^2 - S\alpha + RT = 0,$$

et μ sera égal à $k\lambda$; quant à k, sa valeur est $\frac{T}{\alpha}$ ou $\frac{S-\alpha}{R}$.

Introduisons une fonction auxiliaire X définie par l'équation

$$(5)\qquad Rp + \alpha q + \lambda z = X,$$

d'où résulte, en vertu de l'équation (3),

$$(S-\alpha)p + Tq + \mu z = kX.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(6)\quad \begin{cases} R\dfrac{dp}{dx} + \alpha\dfrac{dq}{dx} + \lambda\dfrac{dr}{dx} = \dfrac{dX}{dx} - \dfrac{dR}{dx}p - \dfrac{d\alpha}{dx}q - \dfrac{d\lambda}{dx}z, \\ (S-\alpha)\dfrac{dp}{dy} + T\dfrac{dq}{dy} + \mu\dfrac{dr}{dy} = k\dfrac{dX}{dy} + \dfrac{dk}{dy}X - \dfrac{d(S-\alpha)}{dy}p \\ \qquad\qquad - \dfrac{dT}{dy}q - \dfrac{d\mu}{dy}z. \end{cases}$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$(7)\quad \left\{ \frac{dX}{dx} + k\frac{dX}{dy} + \frac{dk}{dy}X - \left.\begin{matrix} \dfrac{d(S-\alpha)}{dy} \\ -\dfrac{dR}{dx} \\ +P-\lambda \end{matrix}\right| p + \left.\begin{matrix} Q-\mu \\ -\dfrac{d\alpha}{dx} \\ -\dfrac{dT}{dy} \end{matrix}\right| q - \left.\begin{matrix} \dfrac{d\lambda}{dx} \\ -\dfrac{d\mu}{dy} \\ +Z \end{matrix}\right| z = V. \right.$$

Remplaçons dans cette équation μ par $k\lambda$, $\frac{d\mu}{dy}$ par $k\frac{d\lambda}{dy} + \lambda\frac{dk}{dy}$, et p par sa valeur $\frac{X - \alpha q - \lambda z}{R}$, tirée de

l'équation (5), nous obtiendrons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX}{dx}+k\frac{dX}{dy}+\left[\frac{dk}{dy}-\frac{\frac{dR}{dx}+\frac{d(S-\alpha)}{dy}-P+\lambda}{R}\right]X\\ &+\left[\frac{\alpha}{R}\left(\frac{dR}{dx}+\frac{d(S-\alpha)}{dy}-P+\lambda\right)-\frac{d\alpha}{dx}-\frac{dT}{dy}+Q-k\lambda\right]q\\ &+\left[\frac{\lambda}{R}\left(\frac{dR}{dx}+\frac{d(S-\alpha)}{dy}-P+\lambda\right)-\frac{d\lambda}{dx}-k\frac{d\lambda}{dy}-\lambda\frac{dk}{dy}+Z\right]z=V.\end{aligned}\right.$$

Égalons à o le coefficient de q, nous aurons

$$(9)\quad \lambda=\frac{\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dT}{dy}-Q-\frac{\alpha}{R}\left[\frac{dR}{dx}+\frac{d(S-\alpha)}{dy}-P\right]}{\frac{\alpha}{R}-k},$$

et l'équation (8) se réduira à la forme

$$(10)\quad \frac{dX}{dx}+k\frac{dX}{dy}+MX+Nz=V,$$

en posant

$$(11)\quad M=\frac{dk}{dy}-\frac{\frac{dR}{dx}+\frac{d(S-\alpha)}{dy}-P+\lambda}{R},$$

$$(12)\quad N=\frac{\lambda}{R}\left[\frac{dR}{dx}+\frac{d(S-\alpha)}{dy}-P+\lambda\right]-\frac{d\lambda}{dx}-k\frac{d\lambda}{dy}-\lambda\frac{dk}{dy}+Z.$$

On peut simplifier les valeurs de λ, M, N. Faisons $R=1$; ce qui suppose que le terme en r ne manque pas dans l'équation différentielle (1) et qu'on a divisé tous les termes par le coefficient de r; alors k est égal à $S-\alpha$ et T à $\alpha(S-\alpha)$. En portant ces valeurs de T, k et R

dans les formules (9), (11), (12), on obtient

$$(13)\qquad \lambda = \frac{\frac{d\alpha}{dx} + (S-\alpha)\frac{d\alpha}{dy} + P\alpha - Q}{2\alpha - S},$$

$$(14)\qquad M = P - \lambda,$$

$$(15)\qquad N = Z - \lambda(P-\lambda) + \frac{d\lambda}{dx} + k\frac{d\lambda}{dy}.$$

L'équation différentielle du deuxième ordre se trouve donc ainsi ramenée aux deux équations simultanées du premier ordre (5) et (10). On tirera de (10) la valeur de z et de ses dérivées p, q, on les portera dans (5) et on aura une équation du deuxième ordre en X de même forme que la proposée.

Si dans (10) le coefficient de z est nul, c'est-à-dire si $N = 0$, on aura à intégrer une équation du premier ordre en X; et, en portant dans (5) la valeur trouvée de X, on aura une équation du premier ordre en z.

Lorsque N n'est pas nul, on peut appliquer à l'équation du second ordre en X une transformation analogue; et de même que l'équation du second ordre en z a été remplacée par les deux équations simultanées du premier ordre

$$(5)\qquad \frac{dz}{dx} + \alpha\frac{dz}{dy} + \lambda z = X,$$

$$(10)\qquad \frac{dX}{dx} + k\frac{dX}{dy} + MX + Nz = V,$$

dans lesquelles α et k sont les racines de l'équation

$$(4)\qquad \alpha^2 + S\alpha + T = 0,$$

et λ, M, N ont les valeurs (13), (14), (15), on remplacera l'équation du deuxième ordre en X par les deux

équations

$$(16)\qquad \frac{dX}{dx} + \alpha \frac{dX}{dy} + \lambda' X = X',$$

$$(17)\qquad \frac{dX'}{dx} + k \frac{dX'}{dy} + M'X' + N'X = V',$$

dans lesquelles λ', M', N' ont de certaines valeurs dépendant de celles de α, k, λ, M, N. Lorsque N' sera nul, on obtiendra X' en intégrant l'équation du premier ordre

$$\frac{dX'}{dx} + k \frac{dX'}{dy} + M'X' = V';$$

l'intégration de l'équation (16) donnera X, et, par suite, on aura z en substituant cette valeur de X dans l'équation (10). Si N n'est pas nul, on formera deux nouvelles équations simultanées

$$(18)\qquad \frac{dX'}{dx} + \alpha \frac{dX'}{dy} + \lambda'' x' = X'',$$

$$(19)\qquad \frac{dX''}{dx} + k \frac{dX''}{dy} + M''X'' + N''X' = V'',$$

dans lesquelles λ'', M'', N'' ont de certaines valeurs déduites, suivant une loi constante, de α, k et des quantités précédentes λ', M', N'. Lorsqu'en continuant ainsi on tombera sur un système d'équations simultanées dans lequel le coefficient $N^{(i)}$ sera nul, on n'aura qu'à intégrer deux équations du premier ordre pour obtenir, par une série de substitutions, l'intégrale de l'équation proposée, avec deux fonctions arbitraires.

3. La méthode de transformation que nous venons de développer se trouve en défaut quand l'équation (4), qui donne la valeur de α, a ses racines égales, c'est-à-dire

quand $S^2 = 4RT$, car on ne peut plus disposer de λ dans l'équation (8) pour faire disparaître le terme en q, puisque le coefficient de λ, $2\alpha - S$, est nul dans le multiplicateur de q.

4. On peut appliquer la même méthode à l'équation linéaire du troisième ordre

$$(20)\quad \begin{aligned} &Uu + LUu\!\!\!\!\;\;\imath + Vv + Ww + Rr \\ &+ Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = H, \end{aligned}$$

dans laquelle u, $u\!\imath$, v, w désignent respectivement $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, $\frac{d^3z}{dxdy^2}$, $\frac{d^3z}{dy^3}$. Pour cela, on mettra cette équation sous la forme suivante

$$(21)\left\{\begin{aligned} &U\frac{dr}{dx} + (LU - \alpha)\frac{dr}{dy} + \alpha\frac{ds}{dx} + (V - \beta)\frac{ds}{dy} + \beta\frac{dt}{dx} + W\frac{dt}{dy} \\ &+ \lambda\frac{dp}{dx} + \varepsilon\frac{dp}{dy} + (\mu - \varepsilon)\frac{dq}{dx} + \gamma\frac{dq}{dy} + \theta\frac{dr}{dx} + \omega\frac{dr}{dy} \\ &+ (R - \lambda)r + (S - \mu)s + (T - \gamma)t + (P - \theta)p + (Q - \omega)q + Zz = H, \end{aligned}\right.$$

α, β, λ, μ, ε, γ, θ, ω étant des indéterminées; et on posera

$$(22)\quad Ur + \alpha s + \beta t + \lambda p + (\mu - \varepsilon)q + \theta z = X,$$

avec les équations de condition

$$(23)\quad \frac{U}{LU - \alpha} = \frac{\alpha}{V - \beta} = \frac{\beta}{W} = \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{\mu - \varepsilon}{\gamma} = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{k},$$

d'où résulte

$$(24)\quad (LU - \alpha)r + (V - \beta)s + Wt + \varepsilon p + \gamma q + \omega z = kX.$$

L'équation (21) deviendra ainsi

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{r|r|r|r|r|r|l}
\dfrac{dX}{dx}+k\dfrac{dX}{dy}+\dfrac{dk}{dy}X-\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & r-\dfrac{d(V-\beta)}{dy} & s+(T-\gamma) & t+(P-\theta) & p-\dfrac{d(\mu-\varepsilon)}{dx} & q-\dfrac{d\theta}{dx} & z=H, \\
-\dfrac{dU}{dx} & -\dfrac{d\alpha}{dx} & -\dfrac{d\beta}{dx} & -\dfrac{d\lambda}{dx} & +(Q-\omega) & -\dfrac{d\omega}{dy} & \\
+(R-\lambda) & +(S-\mu) & -\dfrac{dW}{dy} & -\dfrac{d\varepsilon}{dy} & -\dfrac{d\gamma}{dy} & +Z &
\end{array}\right.$$

ou, en y portant la valeur de r tirée de l'équation (22),

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{r|r|r|r|r|r|l}
\dfrac{dX}{dx}+k\dfrac{dX}{dy}-\dfrac{1}{U}\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & X+\dfrac{\alpha}{U}\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & s+\dfrac{\beta}{U}\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & t+\dfrac{\lambda}{U}\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & p+\dfrac{\mu-\varepsilon}{U}\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & q+\dfrac{\theta}{U}\dfrac{d(\iota U-\alpha)}{dy} & z=H. \\
+\dfrac{dk}{dy} & -\dfrac{d\alpha}{dx} & -\dfrac{d\beta}{dx} & -\dfrac{d\lambda}{dx} & -\dfrac{d(\mu-\varepsilon)}{dx} & -\dfrac{d\theta}{dx} & \\
-\dfrac{\iota}{U}\dfrac{dU}{dx} & -\dfrac{d(V-\beta)}{dy} & -\dfrac{dW}{dy} & -\dfrac{d\varepsilon}{dy} & -\dfrac{d\gamma}{dy} & -\dfrac{d\omega}{dy} & \\
+\dfrac{R}{U} & +(S-\mu) & +(T-\gamma) & +(P-\theta) & +(Q-\omega) & +Z & \\
-\dfrac{\lambda}{U} & +\dfrac{\alpha}{U}\dfrac{dU}{dx} & +\dfrac{\beta}{U}\dfrac{dU}{dx} & +\dfrac{\lambda}{U}\dfrac{dU}{dx} & +\dfrac{\mu-\varepsilon}{U}\dfrac{dU}{dx} & +\dfrac{\theta}{U}\dfrac{dU}{dx} & \\
 & -\dfrac{R\alpha}{U} & -\dfrac{R\beta}{U} & -\dfrac{R\lambda}{U} & -\dfrac{\mu-\varepsilon}{U}R & -\dfrac{R\theta}{U} & \\
 & +\dfrac{\lambda\alpha}{U} & +\dfrac{\lambda\beta}{U} & +\dfrac{\lambda^2}{U} & +\dfrac{(\mu-\varepsilon)\lambda}{U} & +\dfrac{\lambda\theta}{U} &
\end{array}\right.$$

Si l'on remplace dans cette équation ε par $k\lambda$, γ par $k(\mu - k\lambda)$ et ω par $k\theta$, il y restera trois indéterminées λ, μ et θ; et l'on pourra en disposer généralement de manière à faire disparaître les termes en s, t, p. On aura ainsi une équation de la forme

$$(27) \qquad \frac{dX}{dx} + k\frac{dX}{dy} + AX + Bq + Cz = H.$$

Si $B = 0$, on tirera de cette équation la valeur de z et de ses dérivées du premier et du deuxième ordre, et, en portant ces valeurs dans l'équation (22), on aura une équation linéaire du troisième ordre en X. Connaissant la fonction X, on aura z au moyen de l'équation (27).

Si B et C sont nuls, on aura à intégrer une équation de premier ordre en X, et, connaissant X, on déterminera z par l'équation du deuxième ordre (22).

5. Il existe une classe générale d'équations linéaires du troisième ordre pour lesquelles l'équation (27) manque du terme en q; ce sont celles qui ne renferment pas, soit V, W, T, soit U, ꝈU, R, c'est-à-dire les termes où la fonction z est différentiée plus d'une fois, soit par rapport à y, soit par rapport à x. En effet, lorsque $V = W = T = 0$, par exemple, les équations (23) donnent $\alpha = ꝈU$, $\beta = 0$, $k = 0$, $\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\omega = 0$; par suite, dans l'équation (26), le coefficient de t est nul, et, en égalant à o les coefficients de s, p, q, on aura trois équations pour déterminer λ, μ, θ, savoir

$$(28) \quad \begin{cases} \dfrac{dꝈU}{dx} - \dfrac{ꝈU}{U}\left(\dfrac{dU}{dx} - R + \lambda\right) - S + \mu = 0, \\ \dfrac{d\lambda}{dx} - \dfrac{\lambda}{U}\left(\dfrac{dU}{dx} - R + \lambda\right) - P + \theta = 0, \\ \dfrac{d\mu}{dx} - \dfrac{\mu}{U}\left(\dfrac{dU}{dx} - R + \lambda\right) - Q = 0. \end{cases}$$

Le système d'équations à intégrer sera alors

$$(29)\quad \begin{cases} \mathrm{U}r + \mathrm{LU}s + \lambda p + \mu q + \theta z = \mathrm{X}, \\ \dfrac{d\mathrm{X}}{dx} - \dfrac{\lambda + \dfrac{d\mathrm{U}}{dx} - \mathrm{R}}{\mathrm{U}}\mathrm{X} + \left[\mathrm{Z} - \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{\theta}{\mathrm{U}}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} - \mathrm{R} + \lambda\right)\right] z = \mathrm{H}, \end{cases}$$

et l'on voit que, en tirant de la seconde de ces équations la valeur de z pour la porter dans la première, on aura une équation du troisième ordre en X de même forme que la proposée, et à laquelle on pourra appliquer la même transformation. Nous ne développerons pas davantage cette méthode, qui est tout à fait analogue à celle que nous avons suivie pour l'intégration de l'équation linéaire du second ordre.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE STIRLING;

PAR M. ERNEST CESARO.

I. Considérons l'expression

$$\varphi_n = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-1}};$$

on la transforme aisément en

$$\varphi_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{1.2.3\ldots n},$$

d'où

$$(1)\qquad 1.2.3\ldots n = \frac{1}{\varphi_n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

II. Calculons φ_n. Nous avons

$$l\varphi_n = \frac{3}{2} l\frac{2}{1} + \frac{5}{2} l\frac{3}{2} + \frac{7}{2} l\frac{4}{3} + \ldots + \frac{2n-1}{2} l\frac{n}{n-1}.$$

Or

$$l\frac{n}{n-1} = \frac{2}{1}\frac{1}{2n-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{(2n-1)^5} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\frac{2n-1}{2}\,l\frac{n}{n-1} = 1 + u_{n-1},$$

si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n-1)^4} + \ldots.$$

Donc

$$(2)\quad l\varphi_n = n - 1 + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) = n - 1 + S_{n-1}.$$

III. Afin de calculer S_{n-1}, étudions la série

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots.$$

On a

$$u_{n-1} < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \ldots\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right].$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1} < \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Donc S_{n-1} tend vers une limite S, inférieure à $\frac{1}{12}$. Les termes étant positifs, on a

$$(3)\qquad S_{n-1} < S.$$

On obtient de même

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots < \frac{1}{12n},$$

d'où

$$(4)\qquad S_{n-1} > S - \frac{1}{12n}.$$

Des inégalités (3) et (4) il résulte que l'on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{12n},$$

θ étant compris entre o et 1.

IV. L'égalité (2) devient

$$l\varphi_n = n - 1 + S - \frac{\theta}{12n}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\varphi_n} = e^{1-S} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

Substituant dans (1), on obtient

$$(5) \qquad 1.2.3\ldots n = C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}},$$

C étant la constante e^{1-S} à déterminer.

V. Soit

$$f(n) = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

Une transformation facile donne

$$f(n) = \frac{2^{4n-1}}{n}\left[\frac{(1.2.3\ldots n)^2}{1.2.3\ldots 2n}\right]^2.$$

Or, d'après la formule (5),

$$(1.2.3\ldots n)^2 = C^2 n^{2n+1} e^{-2n+\frac{\theta}{6n}},$$

$$1.2.3\ldots 2n = C(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\frac{\theta'}{24n}}.$$

Donc

$$f(n) = \frac{C^2}{4} e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}},$$

θ' étant, comme θ, une fraction proprement dite.

Si n augmente indéfiniment

$$f(\infty) = \frac{C^2}{4}.$$

Mais, d'après la formule de Wallis,

$$f(\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent $C=\sqrt{2\pi}$.

VI. Donc, enfin,

$$(6)\qquad 1.2.3\ldots n=\sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

SUR L'EXISTENCE DE CERTAINS POLYÈDRES;

PAR M. ERNEST CESARO.

THÉORÈME. — *Il n'y a que cinq espèces de polyèdres dont tous les angles solides ont m arêtes, et toutes les faces n côtés.*

D'après l'hypothèse, le nombre des arêtes serait mS ou nF; mais chaque arête est comptée deux fois. Le nombre des arêtes est donc

$$A=\frac{mS}{2}=\frac{nF}{2},$$

d'où

$$S=\frac{2}{m}A,\quad F=\frac{2}{n}A.$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler

$$S+F=A+2,$$

on obtient

$$A=\frac{2mn}{2(m+n)-mn},$$

On doit avoir

$$2(m+n)-mn>0,$$

d'où

$$m < \frac{2n}{n-2}.$$

D'autre part, $m > 2$, ce qui exige que l'on ait $\frac{2n}{n-2} > 3$, d'où $n < 6$. En faisant successivement $n = 3, 4, 5$, on trouve $m < 6, 4, 3\frac{1}{3}$. Nous obtenons ainsi cinq solutions

$$m = 3, \quad n = 3$$

$$\left\{\begin{matrix} m = 3, & n = 4 \\ m = 4, & n = 3 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} m = 3, & n = 5 \\ m = 5, & n = 3 \end{matrix}\right\}$$

qui correspondent aux polyèdres suivants :

I. Tétraèdre à faces triangulaires et angles trièdres...............	F = 4,	S = 4,	A = 6
II. Hexaèdre à faces quadrangulaires et angles trièdres.............	F = 6,	S = 8	A = 12
III. Octaèdre à faces triangulaires et angles tétraèdres.............	F = 8,	S = 6	
IV. Dodécaèdre à faces pentagonales et angles trièdres................	F = 12,	S = 20	A = 30
V. Icosaèdre à faces triangulaires et angles pentaèdres............	F = 20,	S = 12	

REMARQUE SUR L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES RÉGLÉES ;

PAR M. ERNEST LEBON.

Lorsque deux quadriques réglées ont un plan principal commun P, *une génératrice commune et leurs sec-*

tions par un autre plan principal Q homothétiques, leur intersection est formée de deux génératrices et d'une conique parallèle au plan Q.

Remarquons d'abord que les deux quadriques ont une seconde génératrice commune, car l'intersection de deux surfaces ayant un plan principal commun est symétrique par rapport à ce plan. De plus les deux surfaces ayant deux génératrices communes, leur intersection est complétée par une conique C.

Soit M un point de la conique C. Un plan Q', parallèle à Q, mené par le point M coupe les deux quadriques suivant deux coniques ayant cinq points communs : le point M, les deux points où le plan Q' coupe les génératrices communes et deux points à l'infini. Donc ces deux coniques coïncident et le plan Q' détermine la conique C.

Exemple. — Trouver les projections de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cylindre ayant deux génératrices communes avec l'hyperboloïde et dont la trace horizontale est une circonférence.

QUESTION.

1430. Résoudre le système des deux équations

$$\sin^n x \sqrt{1 - \sin^m y} = a,$$
$$\sin^n y \sqrt{1 - \sin^m x} = b,$$

et donner l'interprétation géométrique des premiers membres des équations que l'on obtient, en éliminant tour à tour $\sin y$ et $\sin x$. (Escary.)

THÉORIE NOUVELLE DU CALCUL DES VARIATIONS;

PAR M. A. PICART.

1. Le calcul des variations, envisagé dans toute son étendue, a pour objet la solution du problème général suivant :

Étant donnée l'intégrale

$$V=\int\int\int\cdots\int F\left\{\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \dfrac{du}{dx_1}, \dfrac{du}{dx_2}, \ldots \\ \dfrac{du}{dx_n}, \dfrac{d^2u}{dx_1^2}, \ldots, \dfrac{d^pu}{dx_1^p}, \ldots; \\ v, \dfrac{dv}{dx_1}, \dfrac{dv}{dx_2}, \ldots, \dfrac{d^2v}{dx_1^2}, \ldots, \\ \dfrac{d^pv}{dx_1^p}, \ldots; w, \dfrac{dw}{dx_1}, \ldots \end{array}\right\} dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

dans laquelle u, v, w, ... *sont de certaines fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; *on fait subir respectivement aux variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et aux fonctions* u, v, w, ... *des variations infiniment petites* δx_1, $\delta x_2, \ldots, \delta x_n$, δu, δv, δw, ... *que l'on suppose fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *il s'agit de trouver la variation correspondante* δV *de cette intégrale.*

Pour résoudre cette question, nous nous bornerons à considérer le cas particulier d'une intégrale triple dans laquelle ne figure qu'une seule fonction u, les résultats relatifs à ce cas s'étendant facilement à celui d'un nombre quelconque de variables indépendantes et de fonctions.

2. Soit donc à trouver la variation que subit l'intégrale triple

$$(1)\quad V=\int\int\int F\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}, \ldots\right) dx\,dy\,dz$$

lorsque les variables indépendantes x, y, z et la fonction u de ces variables subissent respectivement des variations infiniment petites δx, δy, δz, δu, fonctions de x, y, z.

La variation d'une somme étant égale à la somme des variations de ses parties, on a

$$\delta V=\int\int\int \delta\left[F\left(x, y \quad \frac{du}{dx}, \ldots\right) dx\,dy\,dz\right]$$

ou, en appliquant aux variations les règles de différentiation des fonctions

$$(2)\qquad \delta V=\int\int\int(\delta F . dx\,dy\,dz + F . \delta\, dx\,dy\,dz).$$

Il faut donc évaluer δF et $\delta\, dx\,dy\,dz$.

3. Or

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta F &= \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z \\ &\quad + \frac{dF}{du}\delta u + \frac{dF}{d\frac{du}{dx}}\delta\frac{du}{dx} + \ldots; \end{aligned}\right.$$

par conséquent, il suffit de calculer la variation des dérivées partielles successives de la fonction u.

Or, attribuer aux variables x, y, z et à la fonction u les accroissements infiniment petits δx, δy, δz, δu, cela

revient à poser

$$(4)\qquad \begin{cases} x + \delta x = \mathrm{X}, \\ y + \delta y = \mathrm{Y}, \\ z + \delta z = \mathrm{Z}, \\ u + \delta u = \mathrm{U}, \end{cases}$$

et à substituer aux variables x, y, z les nouvelles variables X, Y, Z, et à la fonction u de x, y, z la nouvelle fonction U de X, Y, Z. On est donc conduit à calculer les valeurs des dérivées partielles de cette nouvelle fonction U, par rapport à X, Y, Z, au moyen des dérivées partielles de u par rapport à x, y, z.

Pour évaluer ces dérivées, on regardera U comme une fonction de x, y, z exprimée par la dernière équation du groupe (4) et x, y, z comme des fonctions de X, Y, Z données par les trois premières.

On a ainsi

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{X}} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx}\dfrac{dx}{d\mathrm{X}} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dy}\dfrac{dy}{d\mathrm{X}} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dz}\dfrac{dz}{d\mathrm{X}}, \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{Y}} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx}\dfrac{dx}{d\mathrm{Y}} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dy}\dfrac{dy}{d\mathrm{Y}} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dz}\dfrac{dz}{d\mathrm{Y}}, \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{Z}} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx}\dfrac{dx}{d\mathrm{Z}} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dy}\dfrac{dy}{d\mathrm{Z}} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dz}\dfrac{dz}{d\mathrm{Z}}; \end{cases}$$

mais les équations (4) donnent

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{d\delta u}{dx}, \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{dy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{d\delta u}{dy}, \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{dz} = \dfrac{du}{dz} + \dfrac{d\delta u}{dz}, \end{cases}$$

et

$$(7)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\frac{dx}{dX}+\frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dX}+\frac{d\delta x}{dz}\frac{dz}{dX}=1, \\ \frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dX}+\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{dy}{dX}+\frac{d\delta y}{dz}\frac{dz}{dX}=0, \\ \frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dX}+\frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dX}+\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\frac{dz}{dX}=0, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\frac{dx}{dY}+\frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dY}+\frac{d\delta x}{dz}\frac{dz}{dY}=0, \\ \frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dY}+\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{dy}{dY}+\frac{d\delta y}{dz}\frac{dz}{dY}=1, \\ \frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dY}+\frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dY}+\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\frac{dz}{dY}=0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\frac{dx}{dZ}+\frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dZ}+\frac{d\delta x}{dz}\frac{dz}{dZ}=0, \\ \frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dZ}+\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{dy}{dZ}+\frac{d\delta y}{dz}\frac{dz}{dZ}=0, \\ \frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dZ}+\frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dZ}+\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\frac{dz}{dZ}=1. \end{cases}$$

Comme δx, δy, δz et par suite leurs dérivées sont des infiniment petits, les équations (7) montrent que $\frac{du}{dX}$ est fini, $\frac{dy}{dX}$, $\frac{dz}{dX}$ infiniment petits, et, en conséquence, que l'on a, sans calcul,

$$(7')\quad \begin{cases} \frac{dx}{dX}=1-\frac{d\delta x}{dx}, \\ \frac{dy}{dX}=-\frac{d\delta y}{dx}, \\ \frac{dz}{dX}=-\frac{d\delta z}{dx}, \end{cases}$$

aux quantités du second ordre près.

De même, des équations (8) et (9) on déduit

$$(8')\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dY} = 1 - \dfrac{d\delta y}{dy}, \\ \dfrac{dz}{dY} = - \dfrac{d\delta z}{dy}, \\ \dfrac{dx}{dY} = - \dfrac{d\delta x}{dy}, \end{cases}$$

et

$$(9')\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dZ} = 1 - \dfrac{d\delta z}{dz}, \\ \dfrac{dx}{dZ} = - \dfrac{d\delta x}{dz}, \\ \dfrac{dy}{dZ} = - \dfrac{d\delta y}{dz}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs, ainsi que celles de $\dfrac{dU}{dx}, \dfrac{dU}{dy}, \dfrac{dU}{dz}$, données par les équations (6), dans les équations (5), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx}\right)\left(1 - \frac{d\delta x}{dx}\right) \\ &\quad - \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\right)\frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz}\right)\frac{d\delta z}{dx}, \\ \frac{dU}{dY} &= - \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx}\right)\frac{d\delta x}{dy} \\ &\quad + \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\right)\left(1 - \frac{d\delta y}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz}\right)\frac{d\delta z}{dy}, \\ \frac{dU}{dZ} &= - \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx}\right)\frac{d\delta x}{dz} \\ &\quad - \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\right)\frac{d\delta y}{dz} + \left(\frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz}\right)\left(1 - \frac{d\delta z}{dz}\right), \end{aligned}$$

ou, abstraction faite des termes du second ordre,

$$\frac{dU}{dX} = \frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dx} - \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dx} - \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dx},$$

$$\frac{dU}{dY} = \frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy} - \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dy} - \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dy},$$

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz} - \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dz} - \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dz},$$

et, si l'on pose

$$\delta u - \frac{du}{dx}\delta x - \frac{du}{dy}\delta y - \frac{du}{dz}\delta z = \delta\omega,$$

ces formules deviennent

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\frac{dU}{dX} &= \frac{du}{dx} + \frac{d\delta\omega}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\delta x + \frac{d^2u}{dx\,dy}\delta y + \frac{d^2u}{dx\,dz}\delta z,\\
\frac{dU}{dY} &= \frac{du}{dy} + \frac{d\delta\omega}{dy} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\delta x + \frac{d^2u}{dy^2}\delta y + \frac{d^2u}{dy\,dz}\delta z,\\
\frac{dU}{dZ} &= \frac{du}{dz} + \frac{d\delta\omega}{dz} + \frac{d^2u}{dz\,dx}\delta x + \frac{d^2u}{dz\,dy}\delta y + \frac{d^2u}{dz^2}\delta z.
\end{aligned}\right.$$

De là on déduit les valeurs de

$$\frac{dU}{dX} - \frac{du}{dx},\quad \frac{dU}{dY} - \frac{du}{dy},\quad \frac{dU}{dZ} - \frac{du}{dz},$$

ou de

$$\delta\frac{du}{dx},\quad \delta\frac{du}{dy},\quad \delta\frac{du}{dz},$$

savoir

$$(11)\left\{\begin{aligned}
\delta\frac{du}{dx} &= \frac{d\delta\omega}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\delta x + \frac{d^2u}{dx\,dy}\delta y + \frac{d^2u}{dx\,dz}\delta z,\\
\delta\frac{du}{dy} &= \frac{d\delta\omega}{dy} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\delta x + \frac{d^2u}{dy^2}\delta y + \frac{d^2u}{dy\,dz}\delta z,\\
\delta\frac{du}{dz} &= \frac{d\delta\omega}{dz} + \frac{d^2u}{dz\,dx}\delta x + \frac{d^2u}{dz\,dy}\delta y + \frac{d^2u}{dz^2}\delta z.
\end{aligned}\right.$$

En différentiant la première des équations (10) par rap-

port à X, Y, Z, la seconde par rapport à Y et Z, et la troisième par rapport à Z, et tenant compte des équations (7′), (8′), (9′), on obtient successivement

$$\frac{d^2U}{dX^2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2\delta\omega}{dx^2}+\frac{d^3u}{dx^3}\delta x+\frac{d^3u}{dx^2dy}\delta y\\ \quad+\frac{d^3u}{dx^2dz}\delta z+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d\delta x}{dx}\\ \quad+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d^2u}{dxdz}\frac{d\delta z}{dx}\end{array}\right\}\left(1-\frac{d\delta x}{dx}\right)$$

$$-\left(\frac{d^2u}{dxdy}+\text{termes du premier ordre}\right)\frac{d\delta y}{dx}$$

$$-\left(\frac{d^2u}{dxdz}+\text{termes du premier ordre}\right)\frac{d\delta z}{dx},$$

ou

$$\frac{d^2U}{dX^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2\delta\omega}{dx^2}+\frac{d^3u}{dx^3}\delta x+\frac{d^3u}{dx^2dy}\delta y+\frac{d^3u}{dx^2dz}\delta z,$$

et, de la même manière,

$$\frac{d^2U}{dXdY}=\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{d^2d\omega}{dxdy}$$
$$+\frac{d^3u}{dx^2dy}\delta x+\frac{d^3u}{dxdy^2}\delta y+\frac{d^3u}{dxdydz}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dXdZ}=\frac{d^2u}{dxdz}+\frac{d^2\delta\omega}{dxdz}$$
$$+\frac{d^3u}{dx^2dz}\delta x+\frac{d^3u}{dxdydz}\delta y+\frac{d^3u}{dxdz^2}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dY^2}=\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2\delta\omega}{dy^2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\delta x+\frac{d^3u}{dy^3}\delta y+\frac{d^3u}{dy^2dz}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dYdZ}=\frac{d^2u}{dydz}+\frac{d^2\delta\omega}{dydz}$$
$$+\frac{d^3u}{dxdydz}\delta x+\frac{d^3u}{dy^2dz}\delta y+\frac{d^3u}{dydz^2}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dZ^2}=\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{d^2\delta\omega}{dz^2}+\frac{d^3u}{dxdz^2}\delta x+\frac{d^3u}{dydz^2}\delta y+\frac{d^3u}{dz^3}\delta z;$$

par suite,

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
\delta\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dx^2dy}\delta y + \frac{d^3u}{dx^2dz}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dxdy} &= \frac{d^2\delta\omega}{dxdy} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dxdy^2}\delta y + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dxdz} &= \frac{d^2\delta\omega}{dxdz} + \frac{d^3u}{dx^2dz}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta y + \frac{d^3u}{dxdz^2}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dy^2} &= \frac{d^2\delta\omega}{dy^2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dy^3}\delta y + \frac{d^3u}{dy^2dz}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dydz} &= \frac{d^2\delta\omega}{dydz} + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dy^2dz}\delta y + \frac{d^3u}{dydz^2}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{d^2\delta\omega}{dz^2} + \frac{d^3u}{dxdz^2}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dydz^2}\delta y + \frac{d^3u}{dz^3}\delta z.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les variations des dérivées premières et secondes de u. La loi de formation en est évidente; il reste à montrer qu'elle est générale.

Supposons, à cet effet, que l'on ait

$$\delta\frac{d^{i+j}u}{dx^idy^j} = \frac{d^{i+j}\delta\omega}{dx^idy^j} + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^idy^{j+1}}\delta y + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^idy^jdz}\delta z;$$

en différentiant l'équation

$$\frac{d^{i+j}U}{dX^i dY^j}=\frac{d^{i+j}u}{dx^i dy^j}+\frac{d^{i+j}\delta\omega}{dx^i dy^j}+\frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^{j+1}}\delta y+\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^j dz}\delta z$$

par rapport à X, on obtiendra

$$\frac{d^{i+j+1}U}{dX^{i+1}dY^j}=\left\{\begin{aligned}&\frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}+\frac{d^{i+j+1}\delta\omega}{dx^{i+1}dy^j}+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+2}dy^j}\delta x\\&+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^{j+1}}\delta y+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^j dz}\delta z\\&+\frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^{j+1}}\frac{d\delta y}{dx}\\&+\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^j dz}\frac{d\delta z}{dx}\end{aligned}\right\}\left(1-\frac{d\delta x}{dx}\right)$$
$$-\left(\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^{j+1}}+\text{termes du 1}^{\text{er}}\text{ ordre}\right)\frac{d\delta y}{dx}$$
$$-\left(\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i y^j dz}+\text{termes du 1}^{\text{er}}\text{ ordre}\right)\frac{d\delta z}{dx},$$

ou

$$\frac{d^{i+j+1}U}{dX^{i+1}dY^j}=\frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}+\frac{d^{i+j+1}\delta\omega}{dx^{i+1}dy^j}+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+2}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^{j+1}}\delta y+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^j dz}\delta z,$$

ou

$$\delta\frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}=\frac{d^{i+j+1}\delta\omega}{dx^{i+1}dy^j}+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+2}dy^j}\delta x+\frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^{j+1}}\delta y + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^j dz}\delta z,$$

c'est-à-dire la formule relative à $\frac{d^{i+j}u}{dx^i dy^j}$, dans laquelle l'indice i est remplacé par $i+1$, ce qui démontre la généralité de la loi de formation des variations des dérivées partielles successives de la fonction u.

Si l'on porte dans δF les valeurs de ces variations, on aura δF exprimé en fonction linéaire de δx, δy, δz, $\delta\omega$ et des dérivées partielles de $\delta\omega$.

4. Quant à la variation de $dx\,dy\,dz$, c'est-à-dire du produit des différentielles des variables indépendantes, on l'obtiendra en se rappelant que, lorsque l'on substitue dans une intégrale multiple aux variables x, y, z d'autres variables X, Y, Z liées aux premières par trois équations, il faut substituer au produit $dx\,dy\,dz$ le produit $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$ multiplié par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\mathrm{X}} & \frac{dy}{d\mathrm{X}} & \frac{dz}{d\mathrm{X}} \\ \frac{dx}{d\mathrm{Y}} & \frac{dy}{d\mathrm{Y}} & \frac{dz}{d\mathrm{Y}} \\ \frac{dx}{d\mathrm{Z}} & \frac{dy}{d\mathrm{Z}} & \frac{dz}{d\mathrm{Z}} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} = \frac{dx\,dy\,dz}{\Delta}.$$

Ici, la valeur du déterminant est, aux quantités du second ordre près,

$$1 - \frac{d\delta x}{dx} - \frac{d\delta y}{dy} - \frac{d\delta z}{dz};$$

il en résulte pour $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} - dx\,dy\,dz$, ou la variation de $dx\,dy\,dz$,

$$(13)\quad \delta(dx\,dy\,dz) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) dx\,dy\,dz.$$

La variation δV de l'intégrale se présentera donc sous la forme d'une intégrale triple portant sur une fonction linéaire homogène de δx, dy, dz, $\frac{d\delta x}{dx}$, $\frac{d\delta y}{dy}$, $\frac{\delta dz}{dz}$, de $\delta\omega$ et de ses dérivées partielles successives.

5. On peut la ramener à une intégrale portant sur une quantité qui ne renferme que $\delta\omega$ en facteur.

En effet, d'abord le terme qui contient $\frac{d^{i+j+k}\delta\omega}{dx^i dy^j dz^k}$ donne lieu à l'intégrale

$$\int\int\int A \frac{d^{i+j+k}\delta\omega}{dx^i dy^j dz^k} dx\, dy\, dz,$$

qui peut s'écrire

$$\int\int dy\, dz \int A \frac{d^{i+j+k}\delta\omega}{dx^i dy^j dz^k} dx,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int\int dy\, dz \left(A \frac{d^{i+j+k-1}\delta\omega}{dx^{i-1} dy^j dz^k} \right)$$
$$-\int\int\int \frac{dA}{dx} \frac{d^{i+j+k-1}\delta\omega}{dx^{i-1} dy^j dz^k} dx\, dy\, dz.$$

Cette dernière intégrale, dans laquelle l'ordre de la dérivée de $\delta\omega$ est abaissé d'une unité par rapport à x, se transformera de même en une autre dans laquelle l'ordre sera abaissé de deux unités, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de dérivées de $\delta\omega$ par rapport à x. On fera de même pour les dérivées relatives à y et pour celles relatives à z, et l'on aura finalement une intégrale dans laquelle ne figurera plus que la variation $\delta\omega$.

Ensuite, en transformant de la même manière les intégrales

$$\int\int\int F \frac{d\delta x}{dx} dx\, dy\, dz, \quad \int\int\int F \frac{d\delta y}{dy} dx\, dy\, dz,$$
$$\int\int\int F \frac{d\delta z}{dz} dx\, dy\, dz,$$

on obtient pour la première

$$\int\int dy\,dz(\mathrm{F}\,\delta x)$$
$$-\int\int\int\left[\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)+\left(\frac{d\mathrm{F}}{du}\right)\frac{du}{dx}+\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\frac{du}{dx}}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\ldots\right]\delta x\,dx\,dy\,dz.$$

Or, dans $\delta\mathrm{F}$, les termes qui renferment δx en facteur sont

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)+\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\frac{du}{dx}}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\ldots:$$

donc, après réduction, les termes qui renfermeront δx, δy, δz seront

$$-\frac{d\mathrm{F}}{du}\left(\frac{du}{dx}\delta x+\frac{du}{dy}\delta y+\frac{du}{dz}\delta z\right),$$

et ils se réduisent avec $\frac{d\mathrm{F}}{du}\delta u$ à

$$\frac{d\mathrm{F}}{du}\left(\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dy}\delta y-\frac{du}{dz}\delta z\right)$$

ou

$$\frac{d\mathrm{F}}{du}\delta\omega.$$

Ainsi, toutes réductions faites, la variation $\delta\mathrm{V}$ se composera d'une suite G d'intégrales doubles relatives aux limites, c'est-à-dire à la surface du corps dans l'étendue duquel doit se faire l'intégration triple, et d'une intégrale triple de la forme

$$\int\int\int \mathrm{M}\,\delta\omega\,dx\,dy\,dz,$$

M étant une certaine fonction de x, y, z, u et des dérivées partielles de u.

S'il y avait sous l'intégrale triple proposée plus d'une

fonction u, s'il y avait deux, trois fonctions u, v, w, en posant

$$\delta u - \frac{du}{dx}\delta x - \frac{du}{dy}\delta y - \frac{du}{dz}\delta z = \delta\omega,$$

$$\delta v - \frac{dv}{dx}\delta x - \frac{dv}{dy}\delta y - \frac{dv}{dz}\delta z = \delta\omega_1,$$

$$\delta w - \frac{dw}{dx}\delta x - \frac{dw}{dy}\delta y - \frac{dw}{dz}\delta z = \delta\omega_2,$$

on arriverait, après réductions, à l'intégrale triple

$$\int\int\int (\text{M}\,\delta\omega + \text{N}\,\delta\omega_1 + \text{P}\,\delta\omega_2)\,dx\,dy\,dz.$$

6. Supposons maintenant qu'il s'agisse de déterminer les fonctions u, v, w, de manière que, quelles que soient les variations δx, δy, δz, δu, δv, δw, la variation δV soit nulle. Comme, dans les intégrales doubles, il n'entre que les valeurs *à la surface* des variations δx, δy, δz, $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_1$ et de leurs dérivées, tandis que dans l'intégrale triple les variations sont relatives à toute l'étendue du corps, il faut évidemment que l'intégrale triple et l'ensemble des intégrales doubles soient séparément nulles; et pour que l'intégrale triple soit nulle, quels que soient $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, il faut que l'on ait

$$\text{M} = 0, \quad \text{N} = 0, \quad \text{P} = 0,$$

trois équations nécessaires et suffisantes, avec l'équation relative aux limites $\text{G} = 0$, pour déterminer les trois fonctions u, v, w.

7. Exprimer que la variation de V est nulle, quels que soient $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, c'est exprimer que l'intégrale V est maximum ou minimum.

Si l'on proposait de trouver le maximum ou le minimum dont est susceptible V quand une, deux, trois autres intégrales V_1, V_2, V_3 relatives aux mêmes fonctions

u, v, w et aux mêmes variables x, y, z doivent conserver en même temps chacune une valeur constante, il faudrait joindre à l'équation $\delta V = 0$ les équations analogues

$$\delta V_1 = 0, \quad \delta V_2 = 0, \quad \delta V_3 = 0$$

et l'on devrait avoir simultanément

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &G + \int\int\int (M\ \delta\omega + N\ \delta\omega_1 + P\ \delta\omega_2)\, dx\, dy\, dz = 0, \\ &G_1 + \int\int\int (M_1 \delta\omega + N_1 \delta\omega_1 + P_1 \delta\omega_2)\, dx\, dy\, dz = 0, \\ &G_2 + \int\int\int (M_2 \delta\omega + N_2 \delta\omega_1 + P_2 \delta\omega_2)\, dx\, dy\, dz = 0, \\ &G_3 + \int\int\int (M_3 \delta\omega + N_3 \delta\omega_1 + P_3 \delta\omega_2)\, dx\, dy\, dz = 0. \end{aligned} \right.$$

Or on peut toujours poser

$$M_1 \delta\omega + N_1 \delta\omega_1 + P_1 d\omega_2 = \frac{d\lambda_1}{dx},$$

$$M_2 \delta\omega + N_2 \delta\omega_1 + P_2 d\omega_2 = \frac{d\lambda_2}{dx},$$

$$M_3 \delta\omega + N_3 \delta\omega_1 + P_3 \delta\omega_2 = \frac{d\lambda_3}{dx},$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des fonctions de x, y, z; d'où, en désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & P_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 \\ M_3 & N_3 & P_3 \end{vmatrix},$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta . \delta\omega &= A_1 \frac{d\lambda_1}{dx} + A_2 \frac{d\lambda_2}{dx} + A_3 \frac{d\lambda_3}{dx}, \\ \Delta . \delta\omega_1 &= B_1 \frac{d\lambda_1}{dx} + B_2 \frac{d\lambda_2}{dx} + B_3 \frac{d\lambda_3}{dx}, \\ \Delta . \delta\omega_2 &= C_1 \frac{d\lambda_1}{dx} + C_2 \frac{d\lambda_2}{dx} + C_3 \frac{d\lambda_3}{dx}. \end{aligned} \right.$$

En portant ces valeurs de $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$ dans la première équation du groupe (14), on obtient

$$o = G + \int\int\int\left(\frac{MA_1 + NB_1 + PC_1}{\Delta}\frac{\delta\lambda_1}{dx} + \frac{MA_2 + NB_2 + PC_2}{\Delta} \times \frac{\delta\lambda_2}{dx} + \frac{MA_3 + NB_3 + PC_3}{\Delta}\frac{d\lambda_3}{dx}\right) dx\,dy\,dz;$$

l'intégration par parties donne ensuite

$$o = G + \int\int\left[\frac{(MA_1 + NB_1 + PC_1)\lambda_1 + (MA_2 + NB_2 + PC_2)\lambda_2 + (MA_3 + NB_3 + PC_3)\lambda_3}{\Delta}\right] dy\,dz$$
$$- \int\int\int\left[\frac{d\frac{MA_1 + NB_1 + PC_1}{\Delta}}{dx}\lambda_1 + \frac{d\frac{MA_2 + NB_2 + PC_2}{\Delta}}{dx}\lambda_2 + \frac{d\frac{MA_3 + NB_3 + PC_3}{\Delta}}{dx}\lambda_3\right] dx\,dy\,dz;$$

mais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont, dans l'intérieur du corps, des quantités arbitraires comme $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$; donc on doit avoir

$$(16)\qquad \begin{cases} MA_1 + NB_1 + PC_1 = a\Delta, \\ MA_2 + NB_2 + PC_2 = b\Delta, \\ MA_3 + NB_3 + PC_3 = c\Delta, \end{cases}$$

a, b, c étant indépendants de x. Mais on arriverait au même résultat si, au lieu d'égaler les quantités

$$M_1\delta\omega + N_1\delta\omega_1 + P_1\delta\omega_2,$$
$$M_2\delta\omega + N_2\delta\omega_1 + P_2\delta\omega_2,$$
$$M_3\delta\omega + N_3\delta\omega_1 + P_3\delta\omega_2$$

aux dérivées relatives à x de trois fonctions λ_1, λ_2, λ_3, on les égalait aux dérivées relatives à y ou à z. Donc a, b, c doivent être regardées comme des constantes.

Des trois équations qui précèdent, en se rappelant les

propriétés fondamentales des déterminants, on déduit

$$(17)\qquad \begin{cases} M = aM_1 + bM_2 + cM_3, \\ N = aN_1 + bN_2 + cN_3, \\ P = aP_1 + bP_2 + cP_3. \end{cases}$$

Telles sont les équations qui serviront à déterminer les fonctions u, v, w. Il faudra, en outre, tenir compte de l'équation aux limites

$$G + \int\int \left\{ \begin{array}{l} \frac{MA_1 + NB_1 + PC_1}{\Delta}\lambda_1 + \frac{MA_2 + NB_2 + PC_2}{\Delta}\lambda_2 \\ + \frac{MA_3 + NB_3 + BC_3}{\Delta}\lambda_3 \end{array} \right\} dy\,dz = 0,$$

ou

$$G + a\int\int \lambda_1 dy\,dz + b\int\int \lambda_2 dy\,dz + c\int\int \lambda_3 dy\,dz = 0;$$

mais on a

$$\begin{aligned} G_1 &= -\int\int\int \frac{d\lambda_1}{dx} dx\,dy\,dz = -\int\int \lambda_1 dy\,dz, \\ G_2 &= -\int\int \lambda_2 dy\,dz, \\ G_3 &= -\int\int \lambda_3 dy\,dz; \end{aligned}$$

cette équation équivaut donc à

$$(18)\qquad G = aG_1 + bG_2 + cG_3.$$

D'où l'on voit que les équations qui servent à déterminer les fonctions u, v, w ne sont autres que celles auxquelles on serait conduit si l'on cherchait le maximum ou le minimum de la fonction

$$V - aV_1 - bV_2 - cV_3.$$

La recherche des maxima ou minima relatifs se trouve ainsi ramenée à celle des maxima ou minima absolus.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CYCLES;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnés deux cycles A et B, menons-leur une tangente commune; la distance comprise entre les points de contact de cette semi-droite est la distance tangentielle des deux cycles. Elle n'est évidemment déterminée qu'en valeur absolue; dans tout ce qui suit, je la désignerai simplement sous le nom de *distance des deux cycles*.

On sait que, si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, la distance de deux cycles est égale à la distance des deux cycles correspondants.

2. Étant donnés trois cycles A, B et C, on peut chercher de quelle façon sont distribués dans le plan les cycles équidistants de ces trois cycles. Si nous effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, les cycles α, β et γ correspondant aux cycles donnés, α et β soient opposés, il suffira évidemment de résoudre le problème proposé relativement à la nouvelle figure.

Il est aisé de voir que les cycles équidistants de deux cycles opposés α et β se réduisent aux points du plan. Désignant, en effet, par R et — R les rayons des cycles opposés, par ρ le rayon d'un cycle équidistant de α et de β, par d la distance de son centre au centre commun de α et de β, on a

$$d^2 - (R - \rho)^2 = d^2 - (R + \rho)^2,$$

d'où

$$R\rho = 0;$$

et, comme R est supposé différent de zéro, il suit

nécessairement

$$\rho = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Les cycles équidistants de α, β et γ devant se réduire à des points, on les obtiendra tous en considérant les divers points de l'axe radical D des cycles α et γ; et de là, si l'on revient à la première figure, on voit que les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B, C sont tangents à deux semi-droites fixes Δ et Δ' qui sont les transformées des deux semi-droites opposées définies par la droite D. Ces deux semi-droites passent d'ailleurs par les points p et q, intersections des cycles α et γ, lesquels points peuvent être considérés comme les cycles tangents à α, β et γ.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B *et* C *touchent deux semi-droites fixes* Δ *et* Δ', *qui sont les tangentes communes aux deux cycles qui sont tangents à* A, B *et* C.

J'appellerai ces semi-droites les *semi-droites radicales* des cycles A, B et C; leur point de rencontre est évidemment le centre radical des trois cycles.

3. Proposons-nous de trouver les cycles équidistants de quatre cycles donnés A, B, C et D. Dans ce but effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, α, β, γ et δ correspondant respectivement à A, B, C et D, α et β soient des cycles opposés.

Les cycles équidistants de α et de β se réduisant aux points du plan, il est clair qu'il n'y a qu'un seul cycle qui soit équidistant des cycles α, β, γ et δ : c'est le centre radical des cycles α, γ et δ; et de là, en revenant à la figure primitive, on peut conclure que :

Il n'y a dans le plan qu'un seul cycle équidistant de quatre cycles donnés A, B, C *et* D.

Je le désignerai sous le nom de *cycle radical* des cycles A, B, C et D.

4. Le cycle radical de A, B, C et D étant équidistant de A, B et C touche les semi-droites radicales de ces trois cycles; d'où la proposition suivante :

Étant donnés quatre cycles, les semi-droites radicales de trois quelconques de ces cycles touchent leur cycle radical; en groupant de toutes les façons possibles trois à trois les quatre cycles donnés, on a donc quatre systèmes de deux semi-droites qui touchent le cycle radical.

Un cas particulièrement remarquable est le suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre semi-droites données; A_i désignant l'une quelconque d'entre elles, appelons K_i le cycle qui touche les trois autres. Nous déterminerons ainsi quatre cycles K_1, K_2, K_3 et K_4; soit K leur cycle radical.

Il résulte de ce qui précède que K est tangent aux trois semi-droites radicales de K_1, K_2 et K_3; or ces cycles touchent tous les trois la semi-droite A_4 et il est aisé de voir que, quand trois cycles sont tangents à une même semi-droite Δ, leurs deux semi-droites radicales se confondent entre elles ou, pour parler plus exactement, se composent de deux semi-droites se coupant en leur centre radical et différant infiniment peu de la semi-droite menée en ce point parallèlement à la semi-droite Δ.

On conclut de là que le cycle K passe par le centre radical de K_1, K_2 et K_3 et est tangent à la semi-droite menée par ce point parallèlement à A_4.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère de toutes les façons possibles trois quelconques des cycles K_1, K_2, K_3 *et* K_4 *et leur centre radical, on obtient quatre points qui sont sur un même cycle* K *et les tangentes menées à ce cycle en ces points sont respectivement parallèles aux semi-droites* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Ce cycle K *est le cycle radical de* K_1, K_2, K_3 *et* K_4.

5. Les quatre cycles K_i qui sont ainsi déterminés par les semi-droites A_1, A_2, A_3 et A_4 jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables. J'énoncerai ici la suivante :

Si, parallèlement à une semi-droite donnée Δ, *on mène des tangentes à* K_1, K_2, K_3 *et* K_4, *le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant quelle que soit la direction de* Δ.

Pour démontrer cette proposition, j'énoncerai d'abord le lemme suivant dont l'application est fréquente :

LEMME. — *Si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, à quatre semi-droites parallèles entre elles correspondent également quatre semi-droites parallèles.*

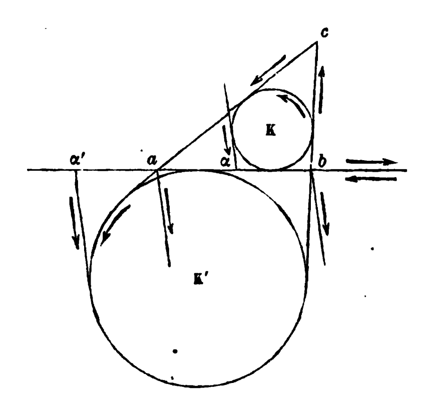
Le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique des quatre premières.

La démonstration de ce lemme résulte immédiatement de ce que deux semi-droites correspondantes se coupent au même point de l'axe de transformation.

Cela posé, je remarque que l'on peut toujours effectuer une transformation par semi-droites réciproques, de telle façon que deux semi-droites données aient pour transfor-

mées deux semi-droites opposées; le théorème que nous voulons démontrer étant projectif, il suffira donc de le démontrer dans ce cas.

Soient donc (*fig.* 1) *ca*, *bc*, *ab* et *ba* quatre semi-droites données (¹), K le cycle tangent à *bc*, *ca* et *ab*, K′



le cycle tangent *ba*, *ca* et *bc*. Il est clair que le cycle tangent à *ca*, *ab* et *ba* se réduit au point *a* et que le cycle tangent à *bc*, *ab* et *ba* se réduit au point *b*.

Cela posé, menons aux deux cycles K et K′ des tangentes parallèles à une semi-droite prise arbitrairement et soient respectivement α et α' les points où ces tangentes coupent la droite *ab*. Les points α et α' se correspondent de façon qu'à un point α correspond un seul point α' et réciproquement à un point α' correspond un seul point α. En effet, si l'on se donne par exemple le point α, on ne peut par ce point mener au cycle K qu'une seule tangente

(¹) Lorsque je désigne une semi-droite par deux lettres, l'ordre dans lequel sont placés ces lettres indique le sens de la semi-droite; ainsi PQ désigne une semi-droite décrite par un point mobile allant du point P au point Q. Il en résulte que PQ et QP sont deux semi-droites opposées.

distincte de ab; d'autre part, on ne peut mener au cycle K' qu'une seule tangente qui soit parallèle à celle-ci; le point α' où elle coupe ab est donc déterminé.

Il résulte de là que les points α et α' déterminent sur la droite ab deux divisions homographiques dont les points doubles sont évidemment les points a et b, et, par suite, en vertu d'une propriété bien connue, le rapport anharmonique des quatre points α, α', a et b est constant. Il en est évidemment de même du rapport anharmonique des tangentes passant par les points α et α' et des parallèles à ces tangentes menées par les points a et b. En d'autres termes, le rapport anharmonique des semi-droites, menées parallèlement à la semi-droite prise arbitrairement et tangentiellement aux cycles K, K', a et b, est constant; ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Étant données deux semi-droites quelconques Δ et Δ', circonscrivons à K_1 un angle dont les côtés soient parallèles à Δ et Δ', et soit P_1 le sommet de cet angle.

Soient de même P_2, P_3 et P_4 les sommets des angles analogues circonscrits aux cycles K_2, K_3 et K_4. Le rapport anharmonique de quatre côtés de ces angles étant égal au rapport anharmonique des quatre autres, il suit de la proposition fondamentale de la théorie des coniques que *les quatre points P_i sont sur une conique ayant ses asymptotes parallèles à Δ et à Δ'.*

En particulier, supposons que Δ et Δ' soient deux droites isotropes de système différent; les points P_i sont les centres des cycles K_i. On peut donc énoncer la proposition suivante, que j'ai déjà démontrée directement dans une Note antérieure (¹) :

(¹) *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole* (*Nouvelles Annales*), même tome, p. 16.

Les centres des cycles K_i *sont situés sur un même cercle.*

7. J'énoncerai encore la proposition suivante :

Étant donnés deux cycles K *et* K', *si l'on considère quatre cycles quelconques* H_1, H_2, H_3 *et* H_4 *doublement tangents à* K *et à* K', *et si, à ces quatre cycles, on circonscrit des angles ayant leurs côtés parallèles aux deux tangentes communes à* K *et à* K', *les quatre sommets de ces angles sont sur une conique ayant leurs asymptotes parallèles à ces tangentes communes.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que le rapport anharmonique des semi-droites, menées tangentiellement aux cycles K_i parallèlement à l'une des tangentes, est égal au rapport anharmonique des semi-droites menées à ces cycles parallèlement à l'autre tangente; et, comme cette propriété est projective, il suffit de la démontrer dans un cas particulier. Or on peut toujours effectuer une transformation par directions réciproques, de telle sorte que les cycles K et K' soient opposés entre eux; les cycles H_i se réduisent alors à quatre points du cercle K_0 déterminé par K et K'; les deux tangentes communes à K et à K' sont des droites isotropes et l'on sait, par la propriété fondamentale du cercle, que les droites isotropes d'un système qui passent par ces quatre points ont leur rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des droites isotropes de l'autre système qui passent par les mêmes points.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Une conique dont la direction des asymptotes est donnée étant déterminée par trois de ses points, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Si l'on considère tous les cycles H *qui touchent deux*

cycles donnés K *et* K′ *et si, à chacun des cycles* H, *on circonscrit un angle dont les côtés soient parallèles aux tangentes communes à* K *et à* K′, *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à ces deux tangentes.*

Il est facile de voir que cette conique a effectivement ces deux tangentes pour asymptotes et qu'elle passe par les points d'intersection des cycles K et K′; d'où encore la proposition suivante :

Étant donnée une conique quelconque, attribuons un sens quelconque aux asymptotes de cette conique de façon à les transformer en deux semi-droites Δ *et* Δ′. *Cela posé, considérons deux points quelconques* M *et* N *de la conique; par le point* M, *on peut mener deux cycles tangents à* Δ *et à* Δ′; *par* N *on peut mener deux parallèles à* Δ *et* Δ′ : *ces deux cycles et ces deux parallèles sont tangents à un même cycle* P.

J'ajouterai que la corde qui joint les points de contact de P avec Δ et Δ′ est l'axe radical des cycles qui, passant par M, touchent ces deux semi-droites.

8. Il est aisé de voir que le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

Par deux points donnés γ *et* δ, *on peut mener deux cercles* K *et* K′ *qui touchent un cercle donné* C; *par les points où la droite* $\gamma\delta$ *rencontre* C, *menons des tangentes à ce cercle, soit* ε *leur point de rencontre. Par les points* γ, δ *et* ε, *faisons passer une conique ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes dont je viens de parler; les asymptotes de cette conique sont deux tangentes communes à* K *et à* K′.

On peut généraliser ce théorème en faisant une transformation homographique de telle sorte que les ombilics

du plan deviennent deux points quelconques α et β; on obtient alors la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques α et β sur une conique C, *par deux points γ et δ du plan et les points α et β on peut mener deux coniques* K *et* K' *qui touchent* C; *par les points où la droite $\gamma\delta$ coupe* C, *menons des tangentes à cette conique et soit ε leur point de rencontre; soient de plus λ et μ les points où la corde $\alpha\beta$ rencontre ces tangentes. Cela posé, si l'on construit la conique déterminée par les cinq points λ, μ, γ, δ et ε, les tangentes menées à cette conique aux points λ et μ sont deux tangentes communes à* K *et à* K' (¹).

9. En particulier, supposons que les points γ et δ soient les ombilics du plan; la proposition précédente pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés sur une conique C *deux points α et β, on peut par ces points mener deux cercles qui touchent* C; *ces deux cercles ont pour tangentes communes les tangentes menées au cercle qui passe par le centre de la courbe et les points où la droite $\alpha\beta$ coupe les asymptotes, aux points situés sur la droite $\alpha\beta$.*

Il est d'ailleurs évident que ces tangentes communes aux deux cercles se coupent en un de leurs centres de similitude.

10. Proposons-nous maintenant le problème suivant

(¹) La détermination des deux autres tangentes communes à K et à K' donnerait lieu à des recherches intéressantes.

Un théorème analogue au précédent a lieu à l'égard des coniques qui touchent une conique donnée, deux tangentes à cette conique et deux droites données.

Je reviendrai du reste sur ce sujet.

(proposé cette année comme sujet de la composition d'admission à l'École Polytechnique) :

Étant donnés deux cercles K *et* K′ *se coupant aux points* α *et* β, *construire les diverses coniques qui, passant par* α *et* β, *touchent ces cercles.*

Construisons deux tangentes communes à K et à K′ passant par un de leurs centres de similitude, puis le cercle H qui touche ces tangentes en leurs points de rencontre avec la droite $\alpha\beta$. En désignant par λ et μ ces deux points, il est clair, d'après la proposition précédente, que si l'on prend un point O quelconque sur le cercle H et si l'on joint $O\lambda$ et $O\mu$, la conique qui, passant par les points α et β, a pour asymptotes $O\lambda$ et $O\mu$, touche les deux cercles K et K′.

Le lieu des centres des coniques cherchées est donc le cercle H, et l'on voit que l'angle formé par les asymptotes de toutes ces coniques est constant.

En considérant les deux tangentes communes qui passent par le second centre de similitude, on obtiendrait un autre système de solutions, le lieu des centres de ces coniques étant un second cercle ayant, comme il est facile de le voir, même centre que le premier.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION;

PAR M. LAQUIÈRE.

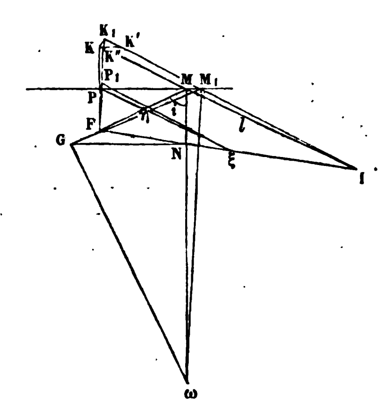
Soient F le pôle lumineux, MM_1 l'élément de la courbe miroir dont ω est le centre de courbure. Le point I brillant, ou contact du rayon réfléchi sur la caustique par réflexion, est le second foyer de la conique dont le

premier foyer est F et qui a un contact du second ordre en M avec la courbe réfléchissante, c'est-à-dire ayant avec elle le point ω comme centre commun de courbure.

Si l'on projette le centre de courbure ω sur le rayon incident en G, puis la projection G elle-même en N sur la normale, en joignant le point lumineux F à cette seconde projection, la droite FN sera l'axe transverse de la conique précitée et par suite coupera le rayon réfléchi en son point de contact I avec la caustique de la courbe proposée.

Nous allons démontrer directement cette construction du point brillant, d'où l'on peut à l'inverse déduire l'élégante construction du centre de courbure sur laquelle nous nous sommes appuyé.

Soit K l'image du pôle lumineux sur la facette MM_1, le lieu des points K sera la caustique secondaire, déve-



loppante de la caustique, lieu des points I. Elle sera par rapport au pôle l'homothétique à dimensions doubles de la podaire P du point lumineux par rapport au miroir, dont le centre de courbure ξ sera au point milieu de la droite FI, et servira à déterminer le point I.

Par F menons les parallèles FK, FK_1 aux deux normales infiniment voisines du miroir qui concourent en ω; elles détermineront, sur la perpendiculaire au rayon réfléchi, les extrémités K, K_1 de l'élément de la caustique secondaire correspondant aux dimensions de la facette MM_1. Par K menons une parallèle à la facette $KK''K'$ coupant FK_1 en K'' et K_1I en K', et posons, pour simplifier l'écriture,

$$MN = n, \quad FM = r, \quad M\omega = \rho, \quad FP = p,$$
$$\widehat{FM\omega} = \widehat{\omega MI} = i,$$

et cherchons la longueur $MI = l$ du rayon réfléchi.

Nous avons

$$\frac{\rho}{2p} = \frac{MM_1}{KK''} = \frac{MM_1}{KK'\cos^2 i} = \frac{n}{2p}\,\frac{1}{\cos^2 i},$$

d'où

$$n = \rho\cos^2 i,$$

expression dont la construction géométrique donnée ci-dessus pour le point brillant I n'est que la traduction littérale.

On obtient ensuite la valeur de l par le rapport

$$\frac{l}{r} = \frac{n}{2p - n} = \frac{\rho\cos i}{2r - \rho\cos i}.$$

Le rayon de courbure de la podaire du point F s'en déduit et a pour valeur

$$P\xi = \frac{1}{2}(r + l) = \frac{r^2}{2r - \rho\cos i}.$$

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME RELATIF AUX POINTS D'INFLEXION DES CUBIQUES PLANES;

PAR M. A. LEGOUX.

Soit

$$(1) \qquad U = x^\alpha y^\beta z^\gamma + k u^\delta = 0$$

une équation en coordonnées homogènes; x, y, z étant les trois côtés du triangle de référence, u un polynôme égal à $ax + by + cz$; α, β, γ, δ, des nombres entiers tels que $\delta = \alpha + \beta + \gamma$; a, b, c des quantités données et k un paramètre variable.

Cette équation représente un système de cubiques lorsque l'on suppose $\alpha = \beta = \gamma = 1$ et $\delta = 3$. On sait que les points d'inflexion de ces cubiques sont distribués trois par trois sur des droites, savoir les trois points réels sur la droite u et les deux autrès séries de trois points sur deux droites imaginaires.

Dans le cas général on a des courbes d'ordre δ. Les trois côtés du triangle de référence sont tangents à toutes les courbes du système aux points où ces côtés rencontrent la droite u. L'ordre de contact est égal à $\delta - 1$, de sorte que, si δ est pair, la courbe est située du même côté de la tangente dans le voisinage du point de contact et, si δ est impair, la courbe coupe la tangente; nous aurons dans ce dernier cas un point d'inflexion d'ordre supérieur.

Nous démontrerons que les courbes proposées ont des points d'inflexion imaginaires qui sont distribués sur deux droites imaginaires conjuguées indépendantes de la valeur de k. Si le degré est pair, il n'y a pas d'autres

inflexions; mais, si le degré est impair, il y a en outre les trois points d'inflexion réels situés sur la droite u, de sorte que, dans ce dernier cas, il existe un triangle inflexionnel comme dans les cubiques.

On sait que les points d'inflexion sont situés sur la hessienne dont on peut écrire l'équation sous la forme

$$a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h'^2 = 0,$$

en posant

$$a' = \frac{d^2U}{dx^2}, \quad b' = \frac{d^2U}{dy^2}, \quad c' = \frac{d^2U}{dz^2},$$
$$f' = \frac{d^2U}{dy\,dz}, \quad g' = \frac{d^2U}{dz\,dx}, \quad h' = \frac{d^2U}{dx\,dy}.$$

Or on a

$$\frac{dU}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{\gamma} + k\delta a u^{\delta-1},$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{dU}{dx} = ku^{\delta-1}\left(\delta a - \frac{\alpha u}{x}\right),$$
$$\frac{dU}{dy} = ku^{\delta-1}\left(\delta b - \frac{\beta u}{y}\right),$$
$$\frac{dU}{dz} = ku^{\delta-1}\left(\delta c - \frac{\gamma u}{z}\right),$$

$$a' = \frac{d^2U}{dx^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta}z^{\gamma} + k\delta(\delta-1)a^2u^{\delta-2},$$
$$b' = \beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2}z^{\gamma} + k\delta(\delta-1)b^2u^{\delta-2},$$
$$c' = \gamma(\gamma-1)x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-2} + k\delta(\delta-1)c^2u^{\delta-2},$$
$$f' = \beta\gamma x^{\alpha}y^{\beta-1}z^{\gamma-1} + k\delta(\delta-1)bcu^{\delta-2},$$
$$g' = \gamma\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}z^{\gamma-1} + k\delta(\delta-1)cau^{\delta-2},$$
$$h' = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma} + k\delta(\delta-1)abu^{\delta-2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la hessienne, on trouve que les termes en k^3 et en k^2 disparaissent et

il reste, toutes réductions faites,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha\beta\gamma x^{3\alpha-2}y^{3\beta-2}z^{3\gamma-2} \\ \quad + k\delta x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}z^{2\gamma-2}u^{\delta-2} \\ \quad\quad \times\left[\begin{array}{l} \alpha\beta\gamma(2bcyz+2cazx+2abxy) \\ -\beta\gamma(\beta+\gamma-1)a^2x^2-\gamma\alpha(\gamma+\alpha-1)b^2y^2 \\ -\alpha\beta(\alpha+\beta-1)c^2z^2 \end{array}\right]=0. \end{array}\right.$$

On sait que la hessienne passe aussi par les points singuliers des courbes du système. D'ailleurs ces points sont déterminés par les trois équations

$$\frac{dU}{dx}=0,\quad \frac{dU}{dy}=0,\quad \frac{dU}{dz}=0,$$

et l'on voit facilement que les solutions communes à ces équations sont $x=0$, $u=0$; $y=0$, $u=0$; $z=0$, $u=0$. Donc, en dehors de ces trois points situés sur la droite u et par lesquels passent toutes les courbes du système, tous les points d'intersection de l'une des courbes et de sa hessienne seront bien des points d'inflexion.

L'équation (2) se décompose dans les deux suivantes :

$$x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}z^{2\gamma-2}=0,$$

ce qui donne les trois côtés du triangle de référence, résultat évident, puisque ce sont des courbes singulières infiniment aplaties qu'on obtient en faisant $k=0$ et dont chaque point est un point d'inflexion; et

$$\begin{array}{l} \alpha\beta\gamma x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} \\ \quad + k\delta u^{\delta-2} \\ \quad\quad \times\left[\begin{array}{l} 2\alpha\beta\gamma(bcyz+cazx+abxy) \\ \quad -\beta\gamma(\beta+\gamma-1)a^2x^2 \\ \quad -\gamma\alpha(\gamma+\alpha-1)b^2y^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)c^2z^2 \end{array}\right]=0. \end{array}$$

On aura le lieu des points d'inflexion de toutes les cour-

bes du système en éliminant k entre cette équation et l'équation (1), ce qui donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}a^2x^2-\frac{\gamma+\alpha}{\beta}b^2y^2-\frac{\alpha+\beta}{\gamma}c^2z^2\\ &\qquad +2bcyz+2cazx+2abxy=0,\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$\left[\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}\,ax-(by+cz)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}\right]^2 + \frac{\delta}{\beta+\gamma}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,cz-\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\,by\right)^2=0.$$

Sous cette dernière forme, on voit que le lieu des points d'inflexion se compose de deux droites imaginaires conjuguées.

Enveloppe des tangentes d'inflexion. — L'équation d'une tangente à une courbe du système en un point (x, y, z) peut s'écrire

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z=0,$$

en posant

$$\lambda=\delta a-\frac{\alpha u}{x},\quad \mu=\delta b-\frac{\beta u}{y},\quad \nu=\delta c-\frac{\gamma u}{z}.$$

Cherchons la relation qui doit exister entre λ, μ, ν, pour que le point de contact soit situé sur une des droites représentées par l'équation (3). L'équation de l'une de ces droites peut s'écrire

$$\mathrm{A}ax+\mathrm{B}by+\mathrm{C}cz=0;$$

mais on a, d'après ce qui précède,

$$ax=\frac{\alpha a u}{\delta a-\lambda},\quad by=\frac{\beta b u}{\delta b-\mu},\quad cz=\frac{\gamma c u}{\delta c-\nu};$$

en substituant, il vient

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{A}\alpha a}{\delta a-\lambda}+\frac{\mathrm{B}\beta b}{\delta b-\mu}+\frac{\mathrm{C}\gamma c}{\delta c-\nu}=0,$$

équation du second degré en λ, μ, ν.

En remplaçant ax, by, cz par leurs valeurs dans l'expression de u,

$$u = ax + by + cz,$$

on a

$$(5) \qquad \frac{a\alpha}{\delta a - \lambda} + \frac{b\beta}{\delta b - \mu} + \frac{c\gamma}{\delta c - \nu} = 1;$$

l'équation de la tangente à la courbe peut s'écrire

$$(6) \quad (\delta a - \lambda)X + (\delta b - \mu)Y + (\delta c - \nu)Z = \delta(aX + bY + cZ).$$

En prenant pour paramètres variables les quantités

$$\frac{1}{\delta a - \lambda}, \quad \frac{1}{\delta b - \mu}, \quad \frac{1}{\delta c - \nu},$$

et en éliminant deux de ces paramètres entre les équations (4), (5) et (6), on trouve que l'équation finale est du troisième degré relativement au troisième paramètre. D'où l'on conclut que, par un point donné quelconque, on peut mener trois tangentes à la courbe enveloppe des tangentes d'inflexion : donc, en général, les tangentes aux points d'inflexion imaginaires situés sur les deux droites trouvées précédemment enveloppent deux courbes de troisième classe.

Remarque I. — Les courbes du système précédent sont telles qu'il en passe une seule par un point quelconque du plan et qu'il en existe deux tangentes à une droite donnée. Cette propriété est une conséquence immédiate de la forme de leur équation différentielle que l'on trouve sans difficulté et qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}(\alpha by - \beta ax)\,z\,(y\,dx - x\,dy)\\ + (\beta cz - \gamma by)\,x\,(z\,dy - y\,dz)\\ + (\gamma ax - \alpha cz)\,y\,(x\,dz - z\,dx) = 0;\end{aligned}$$

ces courbes font donc partie du système (1, 2), d'après les notations de Chasles.

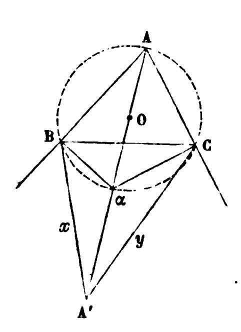
Remarque II. — Si l'on prend les transformées de

ces courbes par le principe de dualité, on aura un système de courbes douées de points de rebroussement imaginaires et le lieu de ces points de rebroussement se composera de deux coniques. Ces courbes corrélatives feront partie du système (2, 1), c'est-à-dire qu'il en existera une seule tangente à une droite donnée et qu'il en passera deux par chaque point du plan.

SUR LA CIRCONFÉRENCE DES NEUF POINTS;

PAR M. E. CATALAN.

1. *Triangles annexes.* — Par le sommet B d'un triangle ABC, menons la droite Bx, symétrique de BC, relativement à AB; et, par le sommet C, menons Cy, symétrique de BC, relativement à AC. En général, ces



droites Bx, Cy déterminent, avec BC, un triangle BCA' (¹). Pour abréger, je dirai que ce triangle est l'*annexe* de ABC, suivant BC.

D'après la construction, les angles CBA', BCA' sont

(¹) Si l'angle A est droit, les lignes Bx, Cy sont parallèles.

donnés par les formules

$$B' = 2^d - 2B, \quad C' = 2^d - 2C;$$

d'où il résulte, semblablement,

$$A' = 2^d - 2A.$$

Ainsi, *les angles du triangle annexe de* ABC *sont les suppléments des doubles des angles du triangle* ABC.

2. Remarque. — *Les trois annexes d'un triangle donné sont semblables entre elles.*

3. Théorème I. — *La circonférence circonscrite à un triangle* ABC *contient les centres des cercles inscrits aux trois annexes de* ABC. *De plus, ces centres sont les points diamétralement opposés aux sommets* A, B, C.

Soit α le centre du cercle inscrit au triangle BCA'. La droite $B\alpha$, bissectrice de l'angle CBA', est, par la construction même, perpendiculaire à BA'. Semblablement, $C\alpha$ est perpendiculaire à CA. Donc la circonférence, décrite sur $A\alpha$ comme diamètre, est circonscrite au triangle donné.

4. Théorème II. — *Les sommets* A, A' *et les centres* O, α *appartiennent à une même droite, bissectrice de l'angle* A'.

Soit $A'\alpha$ cette bissectrice. On a

$$B\alpha A' = 2^d - \tfrac{1}{2}(A' + B') = A + B.$$

D'un autre côté, les angles $B\alpha C$, BCA sont égaux, comme inscrits au même segment :

$$B\alpha C = C;$$

donc

$$B\alpha A' + B\alpha C = A + B + C = 2^d.$$

5. Remarques. — 1° A *est le centre du cercle ex-inscrit au triangle* A′BC, *tangent au côté* BC; 2° *le rayon de ce cercle est la hauteur du triangle* ABC, *opposée au côté* BC.

6. *Relations entre les éléments des quatre triangles.* — Ces relations donnent lieu à d'intéressants exercices trigonométriques. En général, elles sont assez compliquées, sauf celle-ci :

Soit R *le rayon du cercle circonscrit au triangle donné; soient* λ, μ, ν *les distances* AA′, BB′, CC′. *On a*

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{R}.$$

7. *Circonférence des neuf points.* — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle MNP. La circonférence ABC devient la *circonférence des neuf points* (milieux des côtés; pieds des hauteurs; milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs); elle contient donc les centres des cercles inscrits aux annexes de ABC. Autrement dit :

Théorème. — *La circonférence des neuf points, relative à un triangle* MNP, *contient les centres des cercles inscrits aux annexes du triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de* MNP.

Voilà donc *trois* points, ajoutés aux *neuf* que l'on connaissait ([1]).

([1]) Nous faisons abstraction des autres points remarquables, *en nombre indéfini,* situés sur la *circonférence des neuf points.* Voir *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire,* 6e édit., p. 181.

PROPRIÉTÉS D'UNE COURBE DE POURSUITE;

PAR M. ERNEST CÉSARO.

I. Deux mobiles M, μ partent en même temps d'un point O. M parcourt une trajectoire quelconque, μ se meut de manière à occuper, à chaque instant, le centre de gravité du chemin parcouru par M. Soient x, y et α, β les coordonnées respectives de M, μ. Soient r la distance Mμ et s, σ les chemins respectivement parcourus par M, μ.

1° On a

$$s\alpha = \int x\,ds,$$
$$s\beta = \int y\,ds,$$

et, en différentiant,

$$s\,d\alpha = (x-\alpha)\,ds,$$
$$s\,d\beta = (y-\beta)\,ds.$$

Ces égalités, divisées membre à membre, donnent

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{y-\beta}{x-\alpha}.$$

Donc *le second mobile est constamment dirigé vers le premier*. Les mêmes égalités, élevées au carré, ajoutées membre à membre, donnent

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{s}.$$

Donc *le rapport des vitesses des deux mobiles est égal au rapport de leur distance au chemin parcouru par le mobile poursuivi*.

2° Différentiant l'égalité

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$

on trouve

$$\frac{dr}{ds}=\left(\frac{x-\alpha}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\beta}{r}\frac{dy}{ds}\right)-\left(\frac{x-\alpha}{r}\frac{d\alpha}{ds}+\frac{y-\beta}{r}\frac{d\beta}{ds}\right).$$

Or, si l'on désigne par θ l'angle des tangentes aux deux trajectoires, en deux points correspondants, la première parenthèse est évidemment égale à $\cos\theta$, et la seconde à $\frac{d\sigma}{ds}\cdot$ Donc

$$\cos\theta = \frac{d(\sigma+r)}{ds},$$

ou bien

$$\cos\theta = 2k + s\frac{dk}{ds},$$

si l'on désigne par k le rapport des vitesses $\frac{d\sigma}{ds}$ ou $\frac{r}{s}\cdot$

II. Y a-t-il des trajectoires pour lesquelles k reste constant? On doit avoir $\cos\theta = 2k$, c'est-à-dire que θ doit être constant. Généralement, cet angle est nul en O : donc il doit rester constamment nul, et l'on doit avoir $k=\frac{1}{2}$. *Les trajectoires se confondent en une ligne droite.* Mais θ peut ne pas être nul en O, et cela arrive lorsque la tangente en O n'est pas déterminée, comme dans une spirale logarithmique de pôle O. Alors les trajectoires jouissent des propriétés suivantes :

1° $\cos\theta = 2k$. *θ est constant.*

2° $r=\sigma=ks$. *La distance des deux mobiles est égale au chemin parcouru par le mobile poursuivant, et proportionnelle au chemin parcouru par le mobile poursuivi.*

III. Examinons le cas d'une spirale logarithmique, dont l'équation est $u = ae^{m\omega}$.

1° Les arcs étant comptés à partir du pôle, les formules ordinaires donnent, pour les coordonnées du

centre de gravité, les valeurs suivantes

$$\alpha = \frac{mu}{1+4m^2}(\sin\omega + 2m\cos\omega),$$

$$\beta = \frac{mu}{1+4m^2}(2m\sin\omega - \cos\omega).$$

Puis

$$x - \alpha = \frac{u}{1+4m^2}[(1+2m^2)\cos\omega - m\sin\omega],$$

$$y - \beta = \frac{u}{1+4m^2}[m\cos\omega + (1+2m^2)\sin\omega],$$

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+4m^2}}u.$$

D'autre part, on sait que

$$s = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}u.$$

Par suite,

$$k = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{s} = \frac{m}{\sqrt{1+4m^2}}.$$

Donc *le rapport des vitesses est constant.*

2° On a

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{mu}{\sqrt{1+4m^2}} = ku.$$

Donc *le rapport des rayons vecteurs est constant.*

3° On a

$$\cos\theta = 2k = \frac{2m}{\sqrt{1+4m^2}},$$

d'où

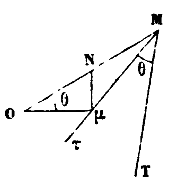
$$\tang\theta = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\tang V,$$

si l'on désigne par V l'angle constant que fait la tangente en M avec OM. Il est donc facile de construire θ, connaissant V. D'autre part,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2m\sin\omega - \cos\omega}{\sin\omega + 2m\cos\omega}\tang(\omega-\theta).$$

Donc *l'angle des rayons vecteurs* OM, Oμ *est constant et égal à* θ. Remarquons aussi que *le triangle* OMμ *reste toujours semblable à lui-même.*

4° De ce qui précède, il résulte une construction fort simple du centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique, compté à partir du pôle. Soit MT la tangente

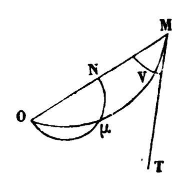


en M. On mène Oμ, Mμ faisant respectivement avec OM, MT le même angle θ. Le point μ est le centre de gravité cherché. Si l'on élève μN perpendiculaire à Oμ, on a

$$\mathrm{ON} = \frac{\mathrm{O}\mu}{\cos\theta} = \frac{k.\mathrm{OM}}{\cos\theta} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OM}.$$

Donc N est le milieu de OM. De là une autre construction. Enfin, une troisième construction consiste à décrire sur OM, ON les circonférences respectivement capables des angles $\pi - \mathrm{V}$, $\frac{\pi}{2}$. Ces circonférences se coupent en μ, au centre de gravité cherché.

5° L'angle O$\mu\tau$ est évidemment égal à $\theta + (\mathrm{V} - \theta) = \mathrm{V}$.



Donc *le lieu du point* μ *est une spirale égale à la première et de même pôle.*

6° On démontre aisément que le centre de cour-

bure C, de la spirale (M) au point M, est le point diamétralement opposé à M, dans la circonférence OMμ, et que le centre de courbure de la spirale (μ), au point μ, se trouve au milieu de Cμ.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1882.

PREMIÈRE SESSION.

I. — *Géométrie analytique.*

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et soient α et β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M et M' des tangentes menées du point P à l'ellipse et par les points Q et Q' où cette ellipse est rencontrée par la droite $\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}+\mu=0$.

Disposer du paramètre μ et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère, passant par le point P.

On fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x+y=l$, et l'on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur la droite QQ';

2° Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes MM' et QQ'.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l, et déterminer ces points. Chercher

pour quelles valeurs de l ce lieu se réduit à deux droites et déterminer ces droites.

II. — *Épure.*

Hyperboloïde à une nappe, entaillé par quatre sphères. — L'hyperboloïde a son axe (z, z') vertical, à $0^m,105$ du plan vertical et au milieu de la feuille; la cote de son centre est $0^m,087$; les rayons de son collier (r, r') et de sa trace horizontale (θ) ont respectivement $0^m,008$ et $0^m,095$ de longueur.

Les sphères, dont les centres sont dans le plan du collier (r, r'), touchent le plan horizontal aux extrémités (a_1, a'_1), (a_2, a'_2), (a_3, a'_3), (a_4, a'_4) des deux diamètres du cercle (θ) respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre.

On demande de construire les projections des intersections de l'hyperboloïde avec les sphères.

Dans la mise à l'encre, on représentera les parties de la *surface* de l'hyperboloïde qui, placées à l'extérieur des sphères, sont comprises entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal P', à la cote $0^m,171$. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'une des lignes d'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,220$ du petit côté inférieur. Les dimensions du cadre sont $0^m,27$ et $0^m,45$.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Hyperboloïde entaillé par quatre sphères.

III. — *Triangle.*

On donne les trois côtés d'un triangle, savoir :

$$a = 4257^m,819,$$
$$b = 7314,205,$$
$$c = 9632,424,$$

et l'on demande de calculer les trois angles A, B, C et l'aire S du triangle.

IV. — *Physique et Chimie.*

1. On a deux baromètres fixes, A et B, formés de deux tubes cylindriques fermés à la partie supérieure par des surfaces planes.

Dans une première expérience, à la température de 0°, la pression étant mesurée dans les deux baromètres par une colonne de mercure H, et la longueur de la chambre barométrique de A étant l, on introduit dans cet espace vide une quantité d'air qui fait baisser le mercure de h dans le tube, le niveau étant supposé constant dans la cuvette.

La température et la pression changent alors; la pression lue au baromètre B est devenue H'; la colonne de mercure de A a une hauteur $H' - h'$. A quelle température a été faite cette deuxième expérience? On négligera la dilatation des tubes, du mercure et de la règle qui a servi à effectuer les mesures.

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = 0,003665$.

Exemple numérique : $H = 76^{cm}$, $l = 14^{cm}$, $h = 6^{cm}$, $H' = 64^{cm}$, $h' = 4^{cm},129$.

2. Indiquer sommairement les préparations de l'acide sulfureux, et donner les formules qui les représentent.

3. Combien faut-il de litres d'air (à 0° et 760^{mm}) pour brûler $29^{gr},75$ de soufre?

Équivalents en poids.................. $S = 16$, $O = 8$
Poids du litre d'oxygène à 0° et 760^{mm}.. $1^{gr},43$

SECONDE SESSION.

I. — *Géométrie analytique.*

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY et deux points H et H′, le premier défini par ses coordonnées a et b, le second symétrique du premier par rapport au point O.

Par ce dernier point, on mène une droite indéfinie DOE formant avec l'axe OX un angle DOX $= \theta$; on projette les points H, H′ sur cette droite en h, h'.

On projette le point h en u sur l'axe OX, et le point u en u_1 sur la droite DOE.

On projette le point h' en v sur l'axe OY, et le point v en v_1 sur la droite DOE. (Toutes ces projections sont orthogonales.)

Enfin sur la longueur $u_1 v_1$, comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle $u_1 v_1$S, en menant v_1S parallèle à OX et u_1S parallèle à OY.

Cela posé, on demande :

1° De trouver les coordonnées du point S, en fonction des trois constantes a, b, θ;

2° D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point S pour sommet et la droite DOE pour directrice;

3° De démontrer que le lieu des foyers de toutes les paraboles obtenues en faisant varier l'angle θ se compose d'un système de deux circonférences de cercle;

4° De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées;

5° De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent toutes en un même point.

II. — *Épure.*

Intersection de deux cônes. — Les cônes, dont les sommets (s, s') (t, t') ont respectivement pour cotes $0^m,050$ et $0^m,080$, touchent, suivant deux génératrices verticales, distantes de $0^m,070$, un même plan de front F, dont l'éloignement du plan vertical égale $0^m,035$. Les sections de ces cônes, par un plan horizontal, à la cote $0^m,090$, sont deux cercles égaux (γ, γ'), (γ_1, γ'_1) dont les rayons ont $0^m,042$ de longueur.

On demande de construire les projections du *corps* constitué par la partie du cône de sommet (s, s') qui, placée de part et d'autre de ce sommet et à l'extérieur de l'autre cône, se trouve comprise entre : 1° un plan de front, dont l'éloignement du plan vertical est $0^m,020$; 2° un plan horizontal, à la cote $0^m,230$; et 3° le plan horizontal de projection.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point de la courbe commune aux cônes, et la tangente en ce point.

Placer la droite ss' à égale distance des grands côtés du cadre, et la ligne de terre à $0^m,170$ du petit côté inférieur. Les dimensions du cadre sont $0^m,27$ et $0^m,45$.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection de deux cônes.

III. — *Triangle.*

Soient

$$a = 4546^m,723,$$
$$b = 5678,364,$$
$$c = 6246,549$$

les trois côtés d'un triangle. Calculer les angles et la surface.

IV. — *Physique et Chimie.*

Un tube cylindrique, fermé à sa partie supérieure par une surface plane A, plonge dans l'eau par sa partie inférieure ouverte B.

Le niveau *mn* de l'eau dans ce tube est le même que le niveau extérieur MN. L'espace A*mn* de hauteur l est plein d'air saturé de vapeur d'eau; la température de l'air et de l'eau vers la surface est t, et la tension correspondante de la vapeur d'eau est mesurée par une colonne de mercure f.

On fait alors descendre verticalement le tube dans des couches plus profondes où la température est t' et la tension correspondante de la vapeur d'eau f'. La distance du niveau fixe MN à la nouvelle surface de séparation $m'n'$ est h. Quelle est la longueur x de l'espace occupé par l'air humide?

La pression atmosphérique reste constante à la surface MN, où elle est mesurée par une colonne de mercure de hauteur H.

On ne tiendra pas compte de la dilatation de l'enveloppe ni de la dissolution de l'air.

Exemple numérique : $l = 20^{cm}$, $t = 20°$, $t' = 10°$,
$H = 75^{cm},738$, $h = 655^{cm},25$, $f = 1^{cm},738$, $f' = 0^{cm},918$.

Densité du mercure : $D = 13,6$. Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = 0,00367$.

2. Indiquer les préparations industrielles de l'oxygène.

3. Quel poids d'acide sulfurique faut-il dédoubler totalement en acide sulfureux et oxygène (sous l'action

de la chaleur), pour obtenir 140^{lit} d'oxygène mesurés à 0° et à 760^{mm} de pression.

Équivalents en poids.................. S = 16, O = 8
Poids du litre d'oxygène à 0° et 760^{mm}.. $1^{gr},43$

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS, par *P. Mansion,* professeur à l'Université de Gand. — Gand, Ad. Hoste; Paris, Gauthier-Villars, 1882. In-8° de 32 p. Prix : 1^{fr}.

Depuis que l'utilité des déterminants s'est affirmée par de nombreuses applications, plusieurs monographies ont été publiées pour vulgariser l'emploi de cette notation et en inculquer rapidement les principes aux élèves. Aujourd'hui, avec le développement que prennent les Sciences mathématiques, le nombre des questions à enseigner n'a fait qu'augmenter.

Il en est résulté, pour les élèves comme pour les professeurs, le besoin d'Ouvrages didactiques exclusivement limités aux seules données indispensables pour la conception des théories.

Dès 1875, M. Mansion a publié, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, un petit Traité de 44 pages, intitulé : *Eléments de la théorie des déterminants, d'après Baltzer et Salmon,* dont une traduction allemande par MM. W. Horn et S. Günther a paru en 1878. Cet Opuscule a servi de plan à l'*Introduction à la théorie des déterminants* du même auteur, dont la première édition, de 28 pages, a été publiée en 1876.

La nouvelle monographie diffère de la première par plusieurs additions dont l'expérience de l'enseignement a fait reconnaître la nécessité à l'auteur. Il ne faut pas y chercher des résultats nouveaux; elle est, avant tout, destinée à servir de guide aux professeurs et aux élèves.

L'*Introduction à la théorie des déterminants* est divisée en trois Chapitres :

I. — *Définitions et propriétés fondamentales.*

Formation des déterminants de quatre et de neuf éléments.

Propriétés de ces déterminants spéciaux.

II. — *Calcul des déterminants.*

Propriétés des mineurs. Principe de l'addition des lignes. Sommes et produits de déterminants.

III. — *Applications.*

Équations linéaires à deux et à trois inconnues. Équations de degré supérieur.

Appendice. — Définitions par les dérangements ou inversions et par les produits symboliques.

L'Opuscule renferme 80 exemples ou exercices, destinés à familiariser le lecteur avec les applications les plus essentielles des déterminants. H. Brocard.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal, par M. *F. Frenet*, ancien élève de l'École Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. Ouvrage destiné aux candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux élèves de ces Écoles et aux personnes qui se préparent à la licence ès Sciences mathématiques. Quatrième édition, revue et augmentée. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

2. Exercices de Géométrie, comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues, par *F. I. C.* Deuxième édition. — Tours, Alfred Mame et fils. Paris, Poussielgue frères; 1882.

ERRATUM.

Dans la question 1430, même tome, *au lieu de*

$$\sin^n x\sqrt{1-\sin^m y} = a,\quad \sin^n y\sqrt{1-\sin^m x} = b,$$

il faut

$$\sin^n x\sqrt{1-\sin^{2n} y} = a,\quad \sin^n y\sqrt{1-\sin^{2n} x} = b.$$

SUR LES COURBES DE DIRECTION DE LA TROISIÈME CLASSE;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Étant donnée une semi-droite quelconque Δ, si l'on considère l'ensemble des semi-droites qui lui sont parallèles, on peut les regarder comme concourant en un même point situé à l'infini et que je désignerai par Δ_∞. Les semi-droites parallèles à la semi-droite opposée $-\Delta$ (¹) peuvent être regardées comme concourant en un même point $-\Delta_\infty$ situé à l'infini.

Ces deux points doivent être considérés comme distincts, et, si l'on appelle D la droite définie par les semi-droites Δ et $-\Delta$, on voit que D renferme deux points situés à l'infini, à savoir Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Nous considérerons les points à l'infini comme situés sur une conique infiniment aplatie et ayant pour sommets les ombilics du plan, et, pour plus de clarté, j'appellerai le point Δ_∞ un *semi-point*, en sorte que la *conique de l'infini* sera le lieu des semi-points du plan.

Un *point* de la *droite de l'infini* doit être considéré comme la réunion de deux semi-points opposés.

Si l'on imagine un cycle variable qui touche constamment deux semi-droites opposées Δ et $-\Delta$, ce cycle, lorsque son centre est rejeté à l'infini, se réduit aux deux semi-points Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Un semi-point peut être considéré comme une courbe de direction de la classe un; il n'y a du reste pas d'autre courbe de direction qui soit de cette classe.

(¹) En général, D désignant une semi-droite quelconque, j'appellerai — D la semi-droite opposée.

Les courbes de direction de la deuxième classe ne comprennent que les cycles; je me propose, dans cette Note, d'étudier les courbes de direction de la troisième classe.

2. Soit μ le nombre des tangentes que l'on peut mener à une courbe de direction de la troisième classe et parallèlement à une semi-droite donnée; comme on peut lui mener également μ tangentes parallèles à la semi-droite opposée, il résulte de là que, par un point de la droite de l'infini, on peut mener à la courbe 2μ tangentes distinctes de cette droite. En désignant par ρ le nombre des points de contact de la droite de l'infini et de la courbe, on a donc

$$2\mu + \rho = 3,$$

et, comme ρ ne peut être égal à 3, il en résulte $\rho = 1$ et $\mu = 1$.

Ainsi la courbe considérée touche la droite de l'infini; une semi-droite isotrope coïncidant avec son opposée, on voit en outre que les deux tangentes (distinctes de la droite de l'infini) que l'on peut, d'un ombilic du plan, mener à la courbe, sont confondues; la courbe passe donc par les deux ombilics.

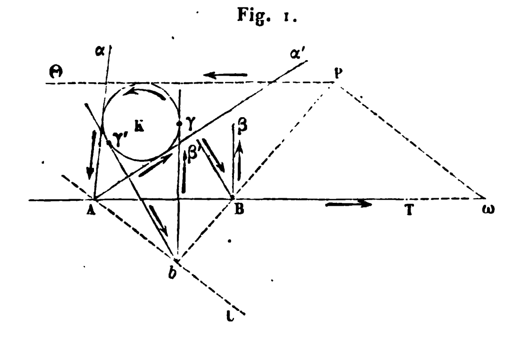
3. Il est clair qu'on ne peut mener à une courbe de direction de la troisième classe qu'une seule tangente T parallèle à une semi-droite donnée. Traçons dans le plan un cycle arbitraire K et menons à ce cycle une tangente Θ parallèle à T; je dirai que cette tangente est l'image de T. Si l'on imagine un nombre quelconque de tangentes à la courbe considérée et si l'on mène tangentiellement à K des tangentes parallèles, ces dernières (ou si l'on veut encore leurs points de contact) formeront l'image des tangentes à la courbe. On voit qu'une

tangente à la courbe est déterminée quand on se donne son image sur le cycle K.

4. Considérons une courbe de direction de la troisième classe H et une tangente quelconque T à cette courbe. Par chaque point de cette semi-droite, on peut mener à la courbe deux tangentes distinctes de T; soient αA et Aα' les tangentes issues d'un point quelconque A de T. Inscrivons dans ces deux semi-droites un cycle quelconque K sur lequel nous ferons l'image des tangentes à H.

Soit B un autre point quelconque de T; désignons par Bβ et β'B les tangentes issues de ce point et soient γb et $\gamma' b$ leurs images sur le cycle fixe K. Il est clair que si l'on se donne la semi-droite $b\gamma$, la tangente Bβ est détermi-

Fig. 1.



née et, par suite, le point B ainsi que la deuxième tangente Bβ' et son image $b\gamma'$. Des deux tangentes au cycle K, $b\gamma$ et $b\gamma'$, l'une étant déterminée quand on se donne l'autre, il en résulte qu'elles forment un système en involution et que leur point de rencontre b décrit une droite du plan. Cette droite U passe du reste par le point A, puisque les tangentes Aα et Aα' se confondent avec leurs images.

A chaque point B de la droite T correspond un point b de la droite U ; les points B et b déterminent donc sur ces droites des divisions homographiques et, comme le point A se correspond évidemment à lui-même, on en conclut que la droite Bb passe par un point fixe du plan.

Pour déterminer la position de ce point fixe, je remarquerai que, si le point B s'éloigne à l'infini sur la tangente T, l'une des tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe est la tangente opposée à T. Si donc nous menons au cycle K la tangente Θ anti-parallèle à T, le point b est situé sur cette semi-droite et la droite bB se confond avec Θ qui, par suite, contient le point fixe cherché.

Soit P ce point fixe ; par ce point menons une droite parallèle à U et coupant T au point ω. Le point ω' où $P\omega$ rencontre U étant situé à l'infini, les tangentes menées de ω' au cycle K sont opposées et ont pour directions celles déterminées par la droite $P\omega$; il résulte donc de ce qui précède que les tangentes issues de ω sont les deux semi-droites opposées déterminées par la droite $P\omega$, qui est ainsi *une tangente double apparente de la courbe*.

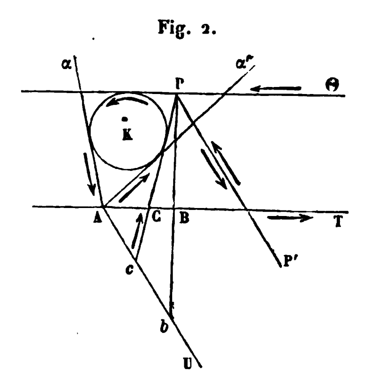
Ainsi la courbe de direction de la troisième classe la plus générale passe par les ombilics du plan, touche la droite de l'infini et a une tangente double apparente ; c'est donc un hypercycle cubique, ou, en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

5. La proposition que je viens de démontrer peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Considérons une tangente quelconque T à un hypercycle cubique H ; d'un point A, pris arbitrairement sur cette semi-droite, menons les deux tangentes à la courbe

$A\alpha$ et $A\alpha'$ qui sont distinctes de T, puis inscrivons dans ces semi-droites un cycle quelconque K.

Fig. 2.



Menons à ce cycle la tangente Θ anti-parallèle à T et soit P le point où cette tangente rencontre la tangente double PP' de la courbe; soit de plus AU la droite menée par A parallèlement à P.

Cela posé, *si, par le point fixe* P, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement* T *et* U *aux points* B *et* b, *les tangentes que l'on peut mener à l'hypercycle par le point* B *sont parallèles aux tangentes menées du point* b *au cycle* K.

6. Par le point P menons au cycle K la tangente PCc qui est distincte de Θ; il est clair, d'après la proposition précédente, que cette semi-droite est également tangente à l'hypercycle, et qu'en faisant varier le cycle K, qui est assujetti à la seule condition de toucher les tangentes $A\alpha$ et $A\alpha'$, on obtiendra ainsi toutes les tangentes à la courbe.

Remarquons maintenant que le cycle qui touche à la fois les tangentes $A\alpha$, $A\alpha'$, PC est précisément le cycle K, que celui qui touche PC et les deux tangentes opposées PP' et P'P se réduit au point P; enfin que, des

deux tangentes communes à ces cycles, l'une est C et l'autre la semi-droite Θ dont la direction reste constante, quelle que soit la tangente PC considérée; nous pourrons alors énoncer la proposition fondamentale suivante :

Théorème I. — *Soient* A, A' *et* B, B' *deux couples de tangentes à un hypercycle cubique* H *et* T *une tangente quelconque à cette courbe; construisons les deux cycles qui touchent respectivement* A, A' *et* T, B, B' *et* T; *ces deux cycles ont* T *pour tangente commune, la seconde tangente commune* Θ *est parallèle à une semi-droite fixe.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce et que l'on peut toujours effectuer la transformation de telle sorte que les tangentes B et B' se transforment en une tangente double apparente de la courbe transformée; auquel cas le théorème résulte immédiatement des remarques qui précèdent.

6. Le théorème précédent donne une propriété remarquable de *six tangentes quelconques* à un hypercycle. En voici d'autres conséquences :

Étant donnés deux couples de semi-droites fixes A, A' et B, B' et une direction fixe Θ_0, menons une semi-droite quelconque Θ parallèle à Θ_0, puis construisons les cycles qui touchent respectivement A, A' et Θ, B, B' et Θ. Ces cycles, qui touchent Θ, ont en outre une deuxième tangente commune T; cette tangente, lorsque Θ se déplace parallèlement à elle-même, enveloppe un hypercycle cubique tangent à A, A', B et B'.

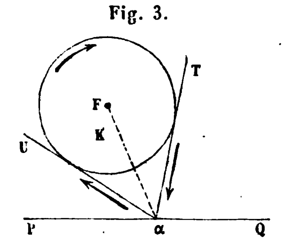
Si l'on fait varier la direction Θ_0, on déterminera

ainsi tous les hypercycles cubiques qui touchent les quatre semi-droites A, A′, B et B′.

7. Comme application, supposons que les tangentes A et A′ soient les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe et que les tangentes B et B′ soient les semi-droites opposées définies par la tangente double apparente PQ.

En désignant par T une tangente quelconque à l'hypercycle, on voit que le cycle, qui touche T et les droites isotropes issues de F, est le cycle K qui a précisément

Fig. 3.



F pour centre; le cycle qui touche T, B et B′ se réduit au point de rencontre α de T et de PQ. La seconde tangente commune à ces deux cycles est la semi-droite U qui est l'antisymétrique de T par rapport à la droite αF.

On peut donc énoncer la proposition suivante, qu'il serait très facile du reste de démontrer directement :

Un hypercycle ayant pour foyer le point F *et pour tangente double la droite* PQ, *si* α *désigne le point où une semi-droite quelconque* T *tangente à la courbe coupe la droite* PQ, *l'antisymétrique de* T *relativement à la droite* Fα *a une direction constante.*

II.

8. Étant données quatre semi-droites quelconques A_1, A_2, A_3 et A_4, construisons les bissectrices (A_1, A_2),

(A_1, A_3), (A_1, A_4) [1]; les foyers des paraboles qui touchent ces trois droites sont les foyers des hypercycles cubiques qui touchent les semi-droites données; on sait d'ailleurs, par un théorème connu, que le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois bissectrices.

Ainsi le lieu des foyers des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données est un cercle K, et, comme il est facile de le voir, ce cercle est celui qui contient les centres des quatre cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former avec les semi-droites données en les prenant trois à trois.

Soient K_1, K_2 et K_3 trois de ces cycles et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ leurs centres; F désignant le foyer de l'un quelconque H des hypercycles qui touchent les semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4, il résulte de ce qui précède que F, α_1, α_2 et α_3 sont situés sur le cercle K.

En d'autres termes, si l'on appelle I et J les deux ombilics du plan, le rapport anharmonique des semi-droites FI, α_1I, α_2I et α_3I est égal au rapport anharmonique des semi-droites FJ, α_1J, α_2J et α_3J; ce que l'on peut encore énoncer de la façon suivante :

Si l'on mène à l'hypercycle H et aux cycles K_1, K_2 et K_3 des tangentes parallèles à une droite isotrope d'un système, puis des tangentes parallèles à une droite isotrope de système différent, les deux systèmes de semi-droites ainsi obtenues ont même rapport anharmonique.

Remarquons maintenant qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cu-

---

[1] Je rappelle que je désigne par la notation (C, D) la bissectrice de deux semi-droites données C et D, c'est-à-dire la *droite parfaitement déterminée* qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

bique en une courbe de même espèce, que le rapport anharmonique de quatre semi-droites parallèles se conserve après la transformation et que la transformation peut toujours être choisie de façon que deux semi-droites prises arbitrairement aient pour transformées des droites isotropes : nous en conclurons immédiatement que la proposition précédente subsiste pour des directions quelconques prises dans le plan.

D'où le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *quatre semi-droites et* K_1, K_2, K_3 *les cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former en adjoignant successivement à* A_4 *deux quelconques des semi-droites* A_1, A_2 *et* A_3 ; *soit de plus* H *un hypercycle cubique quelconque qui touche les semi-droites données. Cela posé, si l'on mène à la courbe et aux trois cycles des tangentes parallèles à une direction quelconque, le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant.*

On peut encore l'énoncer ainsi qu'il suit :

Théorème III. — *Étant donnés trois cycles qui touchent une même semi-droite* Δ, *si une semi-droite* T *se déplace de telle sorte que le rapport anharmonique de cette semi-droite et des tangentes, menées aux trois cycles dans une direction parallèle, ait une valeur constante* k, T *enveloppe un hypercycle cubique tangent à* Δ *et aux trois semi-droites qui touchent à la fois deux des cycles donnés* (1).

Remarque. — En faisant varier le nombre k, on dé-

(1) Si les trois cycles donnés n'étaient pas tangents à une même semi-droite, l'enveloppe de T serait un hypercycle de la quatrième classe ; je reviendrai sur ce sujet.

terminera ainsi tous les hypercycles qui touchent les quatre semi-droites dont je viens de parler.

9. Considérons le faisceau des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4. Soient Δ et Δ' deux semi-droites prises arbitrairement; à chacune des courbes du faisceau on peut circonscrire un angle, et un seul, dont les côtés soient parallèles à Δ et à Δ'; il résulte de ce qui précède que *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à* Δ *et à* Δ'.

En particulier, quand les semi-droites Δ et Δ' viennent à se confondre, on obtient la proposition suivante :

Si, à chacune des courbes du faisceau, on mène une tangente parallèle à une semi-droite donnée Δ, *le lieu du point de contact est une parabole dont l'axe est parallèle à* Δ.

III.

10. L'étude des courbes de direction de la troisième classe se rattache à un autre genre de considérations d'une grande importance dans la théorie générale des courbes de direction.

Étant donnée dans un plan fixe une droite quelconque D, on peut, par cette droite, mener deux plans isotropes qui sont distincts si la droite n'est pas elle-même une droite isotrope; nous rattacherons respectivement ces deux plans aux deux semi-droites Δ et $-\Delta$ déterminées par la droite D.

Ainsi, par toute semi-droite du plan, passera *un plan isotrope parfaitement déterminé*. Cela posé, étant donnée une courbe quelconque de direction K, si l'on imagine les divers plans isotropes qui contiennent les tangentes à cette courbe, ces plans envelopperont une

surface Σ; en d'autres termes, si l'on considère la *développable isotrope* [1] *complète* qui est circonscrite à K, cette développable se décompose en deux surfaces distinctes qui correspondent à K et à la courbe qui lui est opposée.

11. Il résulte de là que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Étant donnée une surface développable isotrope Σ de classe r, tout plan sécant P la coupe suivant une courbe de direction K qui est de la même classe. Je ferai remarquer en outre qu'en désignant par Θ l'arête de rebroussement de Σ la projection orthogonale de Θ sur le plan P est la développée de la courbe K suivant laquelle le plan coupe la développable.

Les cônes isotropes qui ont pour sommets les divers points de Θ coupent le plan P suivant les cycles osculateurs de la courbe K.

12. On voit, en particulier, que l'étude des courbes de direction de la troisième classe se ramène à celles des développables isotropes de troisième classe et ces courbes sont toutes de la même espèce, puisqu'il n'y a qu'une seule espèce de développables de la troisième classe.

Soient Θ une cubique gauche isotrope et Σ la développable isotrope dont elle est l'arête de rebroussement; on voit que toute section plane de Σ est un hypercycle cubique (en d'autres termes, une anticaustique par ré-

---

[1] J'appelle *développable isotrope* une surface développable dont toutes les génératrices sont des droites isotropes et dont, par suite, les plans osculateurs sont des plans isotropes. *Voir,* à ce sujet, mon *Mémoire sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales,* 2ᵉ série, t. XI; 1872).

Des considérations analogues à celles que je développe ici ont été employées par M. Stephanos dans diverses Communications orales faites à la *Société mathématique de France.*

flexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles); la projection orthogonale de Θ sur un plan quelconque est par suite une caustique de parabole.

13. Comme application, considérons un hypercycle cubique K; soient Σ la développable qui est l'enveloppe des plans isotropes, qui contiennent les diverses tangentes à l'hypercyle, et Θ la cubique gauche qui forme son arête de rebroussement.

Considérons trois tangentes quelconques A, B et C à l'hypercycle; désignons respectivement par a, b et c les points où elles touchent la courbe et par α, β et γ les points où les plans isotropes menés par A, B et C touchent la cubique Θ. Ces plans osculateurs de Σ se coupent en un point δ qui, d'après un théorème connu, est situé dans le plan déterminé par les trois points α, β et γ; soit T la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan P de l'hypercycle K.

Les cônes isotropes ayant respectivement pour sommets α, β et γ coupent le plan P suivant les trois cycles R_a, R_b et R_c qui osculent K aux points a, b et c, et l'axe de similitude de ces trois cycles est évidemment la droite T. Le cône isotrope ayant pour sommet le point δ a pour trace sur le plan P le cycle inscrit dans le triangle ABC et, comme le point δ est dans le plan $\alpha\beta\gamma$, il en résulte que le centre de similitude de ce cycle et de l'un quelconque des cycles R_a, R_b et R_c est situé sur T.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés trois points quelconques a, b, c d'un hypercycle cubique, si l'on imagine les cyles R_a, R_b *et* R_c *qui osculent la courbe en ces points et le cycle* R *qui touche les tangentes menées en ces mêmes points, les six centres de similitude de ces quatre cycles considérés deux à deux sont sur une même droite.*

14. On doit remarquer en particulier le cas où le plan, qui contient les points α, β et γ, est un plan isotrope; la proposition précédente peut alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés un hypercycle cubique K *et une semi-droite arbitraire* Δ *située dans son plan; il y a trois cycles osculateurs de* K *qui touchent* Δ. *Les tangentes menées aux points d'osculation et la semi-droite* Δ *sont tangentes à un même cycle.*

15. J'énoncerai encore le corollaire suivant :

Si, par un point quelconque P, *pris dans le plan d'un hypercycle cubique* K, *on mène des tangentes à la courbe et si l'on considère les trois cycles qui l'osculent aux points de contact, l'axe de similitude de ces trois cycles passe par le point* P.

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS

D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES, ENTRE DE CERTAINES LIMITES DE CES VARIABLES, PAR DES SÉRIES PROCÉDANT SUIVANT LES VALEURS, RELATIVES A UN INDICE VARIABLE ET MULTIPLIÉES PAR DES COEFFICIENTS CONSTANTS, D'UNE FONCTION QUI SATISFAIT A UNE CERTAINE FORME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES OU PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. A. PICART.

I. — *Cas d'une seule variable.*

On sait qu'on peut toujours déterminer les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ de la série

$$A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots,$$

de manière qu'elle représente une fonction quelconque $f(x)$ entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ de x.

Ils sont donnés par les formules

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 2\pi A_0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos ix\,dx = A_i \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 ix\,dx = \pi A_i,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin ix\,dx = B_i \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 ix\,dx = \pi B_i.$$

Les fonctions $\cos nx$ et $\sin nx$ qui, d'un terme au suivant, varient avec l'indice n, satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + n^2 u = 0.$$

Si l'on considère deux solutions u et u' de cette équation, correspondant à deux valeurs différentes quelconques n et n' de l'indice n, on voit qu'il existe entre ces valeurs la relation

$$\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)_a^b = (n'^2 - n^2)\int_a^b uu'\,dx,$$

et si la quantité $u'\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{du'}{dx}$ est nulle, ou prend la même valeur aux deux limites a et b, cette relation devient

$$\int_a^b uu'\,dx = 0.$$

C'est cette propriété de la fonction u qui sert de base au mode de détermination des coefficients du développement en série.

Généralement, si une fonction u de x satisfait à une

équation de la forme

$$\frac{d\left[\varphi(x)\frac{du}{dx}\right]}{dx} + \mathrm{F}(x,n)\,u = 0,$$

on aura, en désignant par u' la valeur de u qui correspond à l'indice n',

$$\left[\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)\varphi(x)\right]_a^b = \int_a^b [\mathrm{F}(x,n') - \mathrm{F}(x,n)]uu'dx;$$

par conséquent, si la quantité

$$\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)\varphi(x)$$

est nulle, ou prend la même valeur aux deux limites a et b, et si $\mathrm{F}(x,n') - \mathrm{F}(x,n)$ se réduit à une constante multipliée par une fonction $\lambda(x)$, on aura

$$\int_a^b \lambda(x)\,uu'\,dx = 0.$$

D'où il résulte que la série

$$\mathrm{A}_{\alpha_0}u_{\alpha_0} + \mathrm{A}_{\alpha_1}u_{\alpha_1} + \mathrm{A}_{\alpha_2}u_{\alpha_2} + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha_i}u_{\alpha_i} + \ldots,$$

dans laquelle u_{α_i} désigne la valeur de u correspondant à la valeur α_i de l'indice n, pourra représenter une fonction quelconque $f(x)$, entre les limites a et b, lorsque le coefficient A_{α_i} sera déterminé par la formule

$$\int_a^b f(x)\,u_{\alpha_i}dx = \mathrm{A}_{\alpha_i}\int_a^b \lambda(x)\,u_{\alpha_i}^2 dx.$$

Ainsi, par exemple, si l'on considère la fonction $u = \cos nx$, l'indice n satisfaisant à l'équation

$$nl \operatorname{tang} nl = \text{const.},$$

on pourra développer une fonction $f(x)$, de 0 à l, sui-

vant la somme des différentes valeurs en nombre infini de cos nx, multipliées chacune par une constante. Car cosnx satisfait à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2 u = 0,$$

et de plus la quantité $u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}$ s'annule pour $x = 0$ et $x = l$, puisqu'elle est égale ici à

$$-n\cos n'x \sin nx + n'\cos nx \sin n'x,$$

qui est nul pour $x = 0$ et devient, pour $x = l$,

$$-n\cos n'l \sin nl + n'\cos nl \sin n'l$$

ou

$$(-nl \operatorname{tang} nl + n'l \operatorname{tang} n'l)\cos nl \cos n'l,$$

c'est-à-dire zéro, en vertu de l'équation de condition.

De même une fonction donnée quelconque de n pourra se développer entre les limites -1 et $+1$ suivant les valeurs de la fonction $\theta(x, n, l)$ correspondant à toutes les valeurs entières de n de 0 à $+\infty$ et multipliées chacune par un coefficient, si $\theta(x, n, l)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d\left[(1-n^2)\frac{d\theta}{dx}\right]}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{l^2}{1-x^2}\right]\theta = 0,$$

puisqu'on a

$$\int_{-1}^{+1} \theta\theta'\,dx = 0.$$

De même la série

$$A_0 + A_1 R + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n + \ldots$$

pourra représenter une fonction de x quelconque entre les limites 0 et ρ, si R_n satisfait à l'équation

$$\frac{d.x^2\frac{dR_n}{dx}}{dx} + [n(n+1) - l^2x^2]R_n = 0,$$

et si la quantité

$$R_n \frac{dR_n}{dx} - R_n \frac{dR'_n}{dx}$$

s'annule pour $x = \rho$.

II. — *Cas de deux variables.*

Supposons maintenant que $U(x, y, n)$ soit une fonction de deux variables x et y satisfaisant à l'équation

$$\varphi(y) \frac{d\left[f_1(x,y) \frac{dU}{dx}\right]}{dx} + \psi(x) \frac{d\left[f_2(x,y) \frac{dU}{dy}\right]}{dy} + F(x, y, n) U = 0.$$

On aura, pour une autre valeur n' de l'indice,

$$\varphi(y) \frac{d\left[f_1(x,y) \frac{dU'}{dx}\right]}{dx} + \psi(x) \frac{d\left[f_2(x,y) \frac{dU'}{dy}\right]}{dy} + F(x, y, n') U' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\int_c^d \left[f_1(x,y)\left(U' \frac{dU}{dx} - U \frac{dU'}{dx}\right)\right]_{x=a}^{x=b} \varphi(y)\,dy - \int_a^b \left[f_2(x,y)\left(U' \frac{dU}{dy} - U \frac{dU'}{dy}\right)\right]_{y=c}^{y=d} \psi(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d [F(x,y,n') - F(x,y,n)] UU'\,dx\,dy.$$

Si la fonction $f_1(x,y)$ est nulle ou prend la même valeur pour $x = a$ et $x = b$, en même temps que $f_2(x,y)$ est nulle ou prend la même valeur pour $y = c$ et $y = d$;

si $U'\frac{dU}{dx} - U\frac{dU'}{dx}$ est nul ou prend la même valeur pour $x=a$ et $x=b$, en même temps que $U'\frac{dU}{dy} - U\frac{dU'}{dy}$ est nul ou prend la même valeur pour $y=c$ et $y=d$; ou que $f_1(x,y)$ soit nul ou prenne la même valeur pour $x=a$ et $x=b$, en même temps que $U'\frac{dU}{dy} - U\frac{dU'}{dy}$ est nul ou prend la même valeur pour $y=c$ et $y=d$; ou enfin que $f_2(x,y)$ soit nul ou prenne la même valeur pour $y=c$ et $y=d$, en même temps que $U'\frac{dU}{dx} - U\frac{dU'}{dx}$ s'annule ou prend la même valeur pour $x=a$ et $y=b$; si, en outre, la différence $F(x,y,n') - F(x,y,n)$ se réduit à une constante, fonction de n, n', multipliée par une fonction $\lambda(x,y)$, on voit qu'on aura

$$\int_a^b\int_c^d \lambda(x,y)UU'dx\,dy = 0.$$

Par suite, une fonction quelconque $\Phi(x,y)$ pourra se développer en une série de la forme

$$\Phi(x,y) = \Sigma_n A_n U(x,y,n),$$

et l'on aura

$$\int_a^b\int_c^d \Phi(x,y)\lambda(x,y)U(x,y,n)\,dx\,dy$$
$$= A_n\int_a^b\int_c^d \lambda(x,y)U^2(x,y,n)\,dx\,dy,$$

ce qui déterminera la constante A_n.

Ainsi, par exemple, la fonction Y_n satisfaisant à l'équation

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\frac{dY_n}{d\mu}\right]}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2Y_n}{d\psi^2} + n(n+1)Y_n = 0,$$

$1 - \mu^2$ s'annulant pour $\mu = -1$ et $\mu = +1$, et

$$Y_{n'} \frac{dY_n}{d\psi} - Y_n \frac{dY'_n}{d\psi}$$

prenant la même valeur pour $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$, si Y_n est une fonction périodique de l'angle ψ, de période 2π, on pourra développer une fonction quelconque $\Phi(\mu, \psi)$ de deux variables μ et ψ, entre les limites -1 et $+1$ pour μ, et 0 et 2π pour ψ, suivant une série de fonctions Y_n multipliées chacune par une constante, ou écrire

$$\Phi(\mu, \psi) = \sum_0^n A_n Y_n,$$

le coefficient A_n étant déterminé par la formule

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Phi(\mu, \psi) Y_n \, d\mu \, d\psi = A_n \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n^2 \, d\mu \, d\psi.$$

Mais, pour déterminer ainsi les coefficients, nous avons admis le développement en série comme possible, ou plutôt nous avons admis que la série fournie avec les diverses valeurs de la fonction u, multipliées par les coefficients ainsi déterminés, représentait la fonction donnée. Or cela est loin d'être évident.

Voici comment on peut le démontrer généralement.

I. — *Cas d'une seule variable.*

D'après le mode de calcul des coefficients A_{α_i} de la série

$$A_{\alpha_0} u_{\alpha_0}^{(x)} + A_{\alpha_1} u_{\alpha_1}^{(x)} + A_{\alpha_2} u_{\alpha_2}^{(x)} + \ldots + A_{\alpha_i} u_{\alpha_i}^{(x)} + \ldots,$$

les intégrales prises de a à b de cette série et de la fonction donnée $f(x)$, après leur multiplication par une certaine fonction $\lambda(x)$ et par chacune des valeurs de la

fonction $u^{(x)}$ correspondant à toutes les valeurs en nombre infini de l'indice n, ces intégrales sont égales. Il en résulte nécessairement que pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b la somme de la série est égale à la valeur de la fonction. En effet, représentons par $\varphi(x)$ la somme de la série; divisons l'intervalle de a à b en p parties égales; désignons par h l'une des parties et posons $a+h=x_1$, $a+2h=x_2,\ldots$, $a+(p-1)h=x_{p-1}$. Si p est infiniment grand, on pourra regarder les intégrales, de a à b, des deux fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ multipliées par $\lambda(x)u_{\alpha_i}$, comme égales, l'une à

$$m_0\varphi(a)+m_1\varphi(x_1)+m_2\varphi(x_2)+\ldots+m_{p-1}\varphi(x_{p-1}),$$

l'autre à

$$m_0f(a)+mf(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_{p-1}f(x_{p-1}),$$

la quantité m_q représentant l'expression

$$\lambda(x_q)\,u_{\alpha_i}^{(x_q)}\,h.$$

On a donc

$$\begin{aligned}&m_0\varphi(a)+m_1\varphi(x_1)+\ldots+m_{p-1}\varphi(x_{p-1})\\&\quad=m_0f(a)+m_1f(x_1)+\ldots+m_{p-1}f(x_{p-1}),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}m_0[\varphi(a)-f(a)]+m_1[\varphi(x_1)-f(x_1)]&\\+m_2[\varphi(x_2)-f(x_2)]+\ldots&\\+m_{p-1}[\varphi(x_{p-1})-f(x_{p-1})=0.&\end{aligned}$$

Cette egalite doit avoir lieu pour une infinité de systèmes i de valeurs des quantités $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$, indépendants entre eux, correspondant à toutes les valeurs en nombre infini de l'indice n; ce qui, d'après la théorie des equations linéaires, exige que l'on ait

$$\begin{gathered}\varphi(a)-f(a)=0,\quad \varphi(x_1)-f(x_1)=0,\\ \varphi(x_2)-f(x_2)=0,\quad \ldots,\quad \varphi(x_{p-1})-f(x_{p-1})=0,\end{gathered}$$

c'est-à-dire que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ prennent les

mêmes valeurs pour toute valeur de x comprise entre a et b.

On peut donc écrire, quand le coefficient A_{α_i} est déterminé par la règle ci-dessus,

$$f(x) = \Sigma A_{\alpha_i} u_{\alpha_i}.$$

II. — *Cas de deux variables.*

De même, si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ la somme de la série

$$A_{\alpha_0} U_{\alpha_0} + A_{\alpha_1} U_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} U_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_i} U_{\alpha_i} + \ldots,$$

dont les coefficients ont été formés avec la fonction donnée $f(x, y)$ par l'application de la formule

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) \lambda(x,y) U_{\alpha_i} dx\, dy$$
$$= A_{\alpha_i} \int_a^b \int_c^d \lambda(x,y) U_{\alpha_i}^2 dx\, dy,$$

on a, pour chacune des valeurs en nombre infini de l'indice n,

$$\sum_{p=1}^{p=s} \sum_{q=1}^{q=t} m_{p,q} f(x_p, y_q) = \sum_{p=1}^{p=s} \sum_{q=1}^{q=t} m_{p,q} \varphi(x_p, y_q),$$

l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ étant supposé partagé en s parties égales à h et celui de $y = c$ à $y = d$ en t parties égales à k, x_p et y_q représentant respectivement $a + ph$ et $c + qk$, et $m_{p,q}$ étant la valeur du multiplicateur $\lambda(x, y) U_{\alpha_i} hk$ pour $x = x_p$ et $y = y_q$.

Cette égalité peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^{p=s} \sum_{q=1}^{q=t} m_{p,q} [f(x_p, y_q) - \varphi(x_p, y_q)] = 0;$$

et, comme elle a lieu pour une infinité de systèmes indépendants de valeurs des coefficients $m_{p,q}$, correspondant chacun à chacune des valeurs en nombre infini de l'indice n, on en conclut

$$f(x_p, y_q) = \varphi(x_p, y_q),$$

c'est-à-dire que les deux fonctions $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ prennent les mêmes valeurs pour tout système de valeurs de x et y compris entre $x = a$, $x = b$ et entre $y = c$, $y = d$.

Il convient de remarquer que ce théorème se trouverait évidemment en défaut dans le cas où la fonction u serait de sa nature essentiellement paire ou impaire par rapport à l'une des variables et où on l'assujettirait à fournir le développement en série d'une fonction impaire ou paire de cette variable entre deux limites $-a$, $+a$ égales et de signes contraires.

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE CLASSE DE COURBES SPIRALES;

Par M. LAQUIÈRE.

Recherchons les *courbes dont la tangente tourne avec une vitesse angulaire d'orientation proportionnelle à celle du rayon vecteur mené d'un pôle fixe au point de contact.*

Cette définition caractérise une sorte de spirale s'infléchissant d'un mouvement uniforme sur le rayon vecteur ρ quand celui-ci tourne lui-même d'un mouvement uniforme. Si nous désignons par $\frac{1}{p}$ le coefficient d'infléchissement et par V l'angle sous lequel la courbe

coupe le rayon vecteur, on aura, en prenant pour axe d'orientation un rayon vecteur normal,

$$dV = \frac{1}{p}\, d\omega,$$

$$V = \frac{1}{p}\,\omega + \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \operatorname{tang} V = -\frac{\cos\frac{\omega}{p}}{\sin\frac{\omega}{p}};$$

d'où l'équation générale des courbes, en coordonnées polaires,

(P) $$\rho = a \cos^p \frac{\omega}{p}.$$

Si p est positif, l'angle V augmente en même temps que l'angle polaire ω, et la courbe est tout entière comprise dans l'intérieur du cercle $\rho = a$, de rayon égal à la normale à l'origine.

Si p est négatif ($= -q$ pour mettre le signe en évidence), l'angle V diminuera quand ω augmentera et la courbe sera tout entière extérieure au cercle décrit du pôle comme centre avec la normale à l'origine pour rayon. Cette courbe

(Q) $$\rho \cos^q \frac{\omega}{q} = a$$

est la réciproque par rayons vecteurs de la courbe

(P) $$\rho = a \cos^q \frac{\omega}{q}$$

du premier système.

Suivant que p est positif ou négatif, c'est-à-dire que les courbes appartiennent à la première série (P), courbes fermées, ou à la seconde (Q), courbes à branches infinies, les rayons vecteurs tangents au pôle, ou les

asymptotes correspondent aux directions telles que

$$\frac{\omega}{p} = \frac{(2k+1)\pi}{2},$$

k étant un entier quelconque.

Les points de contact sur le cercle $\rho = a$, ou sommets de la courbe, correspondent aux directions telles que

$$\frac{\omega}{p} = \frac{2k\pi}{2}.$$

Les rayons vecteurs normaux sont axes de la courbe. Il en est de même des rayons vecteurs tangents lorsque p est pair.

Boucles. — Chaque fois que $\frac{\omega}{p}$ varie de $\frac{2k\pi}{2}$ à $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, la courbe donne un arc composant une demi-boucle d'amplitude angulaire $p\frac{\pi}{2}$. Lorsque $\frac{\omega}{p}$ varie ensuite d'une quantité égale de $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ à $\frac{(2k+2)\pi}{2}$, on obtient, si p est pair, une demi-boucle symétrique de la précédente par rapport au rayon vecteur de contact (ou parallèle à l'asymptote) et, si p est impair, une demi-boucle symétrique au contraire par rapport à la normale au point de jonction.

Les deux demi-boucles forment dans le second cas un arc continu symétrique par moitiés; dans le premier, elles ont l'apparence d'un arc symétrique ayant sur son axe de symétrie un point de rebroussement de première espèce. Ce point de rebroussement pourra être simplement apparent si la courbe est à centre et peut alors être décrite d'un trait continu par une autre succession des arcs partiels; il sera réel si la courbe n'a pas de centre au pôle. Dans ce dernier cas, la seconde demi-boucle peut être réelle, ou bien disparaître si p avait une valeur frac-

tionnaire irréductible à dénominateur pair; alors la demi-boucle précédente présenterait au pôle une apparence de point d'arrêt. Toutefois ce point d'arrêt ne serait qu'apparent au point de vue graphique. Le rayon de départ, normal à la courbe, étant en effet axe de symétrie, en faisant tourner, à partir de sa position, le rayon vecteur en sens inverse, il repasse symétriquement par les mêmes valeurs en complétant la boucle d'une partie symétrique qui la ferme en présentant un point angulaire au lieu du point d'arrêt.

En réalité, une boucle complète correspond à la variation d'angle $\frac{\omega}{p}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, ayant pour amplitude de rotation $p\pi$.

La courbe se compose d'une succession (limitée ou indéfinie) de boucles égales disposées en rayon autour du pôle, milieu de toutes les boucles.

Nous n'entrerons pas dans les détails de la discussion descriptive des variétés de ces groupes qui sont enfantées par les diverses hypothèses à faire sur les valeurs respectives de m et n, si l'on fait d'une manière générale $p=\frac{n}{m}$. Cette discussion, d'ailleurs fort intéressante, mais des plus faciles, peut se résumer en quelques mots, ainsi qu'il suit.

Description. — Les courbes spirales à inflexion proportionnelle, telles que la variation d'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur soit dans le rapport $\frac{m}{n}$ avec la rotation de celui-ci $\left(V \text{ variant de } \pi \text{ quand } \omega \text{ croît de } 2\alpha=\frac{n}{m}\pi\right)$, se composent de m boucles d'amplitude angulaire commune égale à $\frac{n\pi}{m}$. Ces boucles, toutes égales entre elles dans une même courbe, sont disposées

de la manière suivante, en supposant la faction $\frac{m}{n}$ rendue irréductible :

Premier cas : *m et n impairs.* — *m* boucles décrites d'un trait continu, alternativement dans l'angle du rayon vecteur et dans son opposé par le sommet. Les angles du plan d'amplitude $2\alpha = \frac{n}{m}\pi$ sont alternativement occupés par les boucles et vides. Leurs circonvolutions font *n* fois le tour de la circonférence.

Deuxième cas : *n pair*, *m impair*. — *m* boucles jointives à rebroussement de première espèce. Les circonvolutions n'occupent qu'un arc de rotation de $\frac{n}{2}$ circonférences.

Troisième cas : *m pair*, *n impair*. — Courbes à centre, formées de *m* boucles disjointes, se réunissant au centre par les points anguleux dont les branches ont le même écartement que l'amplitude de la boucle.

Les deux branches symétriques par rapport au centre forment par leur réunion une ganse à centre et à double inflexion. La courbe entière se compose de $\frac{m}{2}$ ganses pareilles, séparées par des espaces vides d'amplitude angulaire égale à la leur, et occupant par moitié un espace angulaire de *n* circonférences successives.

Quatrième cas : $\frac{m}{n}$ *incommensurable*. — Ce cas, multiple et analogue en ses trois divisions aux trois précédents, en diffère uniquement en ce que le nombre de boucles, toujours identiques entre elles, est indéfini, ainsi que le nombre de circonvolutions de la courbe.

Suivant la nature des termes *m* et *n* de la fraction, la courbe partagera les caractères généraux de la classe

correspondante de courbes à coefficient d'infléchissement commensurable, savoir :

1° Courbes à trait continu, à rayons vecteurs alternativement positifs et négatifs pendant une amplitude déterminée;

2° Courbes à rebroussement de première espèce composées d'une succession indéfinie de boucles jointives identiques;

3° Courbes à centre, formées d'une série de ganses à centre et à double inflexion, se succédant indéfiniment en laissant entre elles des intervalles angulaires vides égaux à leur amplitude.

Propriétés remarquables de ces courbes. — Cherchons la distance δ du pôle à la tangente, rayon vecteur du point correspondant de la podaire du foyer par rapport à la courbe.

Soit θ l'orientation polaire de la perpendiculaire δ à la tangente; on voit immédiatement que

$$\theta = \omega + V - \frac{\pi}{2} = \omega\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

d'où

$$\text{(X)} \qquad \frac{\omega}{p} = \frac{\theta}{p+1} = V - \frac{\pi}{2}.$$

Dans cette relation, l'angle V représente à la fois l'inclinaison du rayon vecteur (ρ, ω) sur la courbe primitive (p) et celle du rayon vecteur (δ, θ) sur la podaire, angles égaux à simple inspection de la figure dans laquelle la normale à la podaire va passer par le milieu du rayon vecteur de la courbe.

On voit par suite que la podaire d'une spirale à inflexion proportionnelle à la rotation du rayon vecteur est une spirale de même nature, se déduisant de la première par la simple substitution de $(p + 1)$ à p.

Le rapport du mouvement angulaire de la tangente par rapport au rayon vecteur au mouvement angulaire absolu de celui-ci étant, pour la courbe primitive,

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{1}{p} = \frac{m}{n},$$

sera, pour sa podaire, de

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{p+1} = \frac{m}{n+m},$$

et au contraire pour la courbe antipodaire, dont la primitive est la podaire, de

$$\frac{dV}{d\psi} = \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n-m}.$$

S'il s'agit de courbes à branches infinies, nous mettrons les signes en évidence en faisant $-p = q$, et nous aurons pour leur équation

$$\rho \cos^q \frac{\omega}{q} = a.$$

L'équation de la podaire de cette courbe est

$$\rho \cos^{q-1} \frac{\omega}{q-1} = a;$$

celle de son antipodaire

$$\rho \cos^{q+1} \frac{\omega}{q+1} = a.$$

Distance de la tangente au pôle. — La distance δ du pôle à la tangente à la courbe p, rayon correspondant de sa podaire, a pour valeur

$$\delta = \rho \sin V = \rho \cos \frac{1}{p}\,\omega = a \cos^{p+1} \frac{\omega}{p}.$$

Elle ne peut devenir nulle ou infinie que lorsque $\cos \frac{\omega}{p}$ est lui-même nul, c'est-à-dire pour les points ex-

trêmes des boucles ou spires successives pour lesquelles ρ est soit nul, soit infini. Il n'y a donc d'autres tangentes passant au pôle que les tangentes aux points où les boucles se croisent au pôle et les asymptotes.

Asymptotes. — La distance δ des asymptotes aux branches infinies est donnée par l'expression

$$\delta = a \cos^{1-q} \frac{\omega}{q}.$$

Trois cas sont à considérer relativement à leur position :

1° $q < 1$, $\delta = 0$. — Branches hyperboliques dont les asymptotes passent toutes au pôle. C'est le cas de $m^2 > n^2$.

2° $q = 1$, $\delta = a$. — Cas singulier. Droite à distance finie du pôle.

3° $q > 1$, $\delta = \infty$. — Toutes les branches sont paraboliques. C'est le cas de $m^2 < n^2$.

Ainsi, lorsque m et n sont de signes contraires, les branches infinies seront paraboliques ou bien auront des asymptotes issues du pôle suivant que n sera de valeur absolue supérieure ou inférieure à celle de m.

Remarque. — Les courbes (p) et les courbes (q) pour lesquelles les arguments p et q ont la même valeur, étant évidemment transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques issus du pôle, les asymptotes des courbes (q) ou cercles de courbure de leurs points à l'infini sont les transformées des cercles de courbure des courbes (p) en leurs points situés au pôle. Il en résulte les valeurs suivantes pour les rayons de courbure des branches au pôle, lorsque $\frac{1}{p} = \frac{m}{n}$ est positif :

1° *Infinis* pour $p < 1$, soit $m > n$;

2° *Égal* à $\frac{a}{2}$ pour $p = 1$, soit $m = n$;

3° *Nuls* pour $p > 1$, soit $m < n$.

Les courbes pour lesquelles $m > n$ sont donc infiniment aplaties au pôle; celles pour lesquelles $m < n$ y sont infiniment courbées y présentent un point circulaire. Les premières y présentent une inflexion dans les courbes à centre, ou un point angulaire dans les courbes n'ayant pas de centre.

Rayon de courbure. — L'orientation θ de la normale étant liée à celle ω du rayon vecteur par la relation

$$\frac{\omega}{p} = \frac{\theta}{p+1},$$

le rayon de courbure R aura pour valeur

$$R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\rho\, d\omega}{\sin V} = \frac{p}{p+1}\,\frac{\rho}{\sin V}.$$

Or, désignant par N la longueur de la normale limitée à la perpendiculaire menée au rayon vecteur par le pôle, cette relation équivaut à

$$R = \frac{p}{p+1}\,N.$$

Le rayon de courbure est dans un rapport constant avec la normale (longueur limitée à la perpendiculaire au rayon vecteur). Cette remarquable propriété pourrait servir de définition au genre de courbes considéré.

Il en résulte que le rayon de courbure sera nul ou infini en même temps que la normale (sauf le cas de $p = -1$). Il ne peut donc être nul qu'au pôle, et infini qu'à l'infini ou lorsque le rayon vecteur est tangent à la courbe. On retrouve les conclusions déjà obtenues au sujet des asymptotes et des points circulaires. Si $p+1 = 0$, la courbe est une droite et $R = \infty$ en tous ses points.

La courbe ne peut avoir d'inflexions qu'au pôle. Ce fait résulte *a priori* de ce que, le mouvement angulaire absolu de la tangente étant proportionnel à celui du

rayon vecteur, est toujours de même sens que celui de ce dernier, ou toujours de sens contraire, et par suite de sens invariable.

Remarque I. — De tous les cercles tangents aux courbes passant par le pôle, aucun ne saurait être cercle de courbure au point de contact, puisqu'il se transformerait avec la courbe réciproque en une tangente passant au pôle touchant la courbe en un point à distance finie.

Remarque II. — Les rayons de courbure de deux courbes de paramètres différents en des points situés sur les mêmes rayons vecteurs sont dans le rapport

$$\frac{R}{R'} = \frac{p(p'+1)}{p'(p+1)}\frac{N}{N'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{\sin V}{\sin V'}\frac{p(p'+1)}{p'(p+1)}.$$

Remarque III. — Si l'on considère les deux courbes (p) et (p'), telles que

$$p+p' = -1,$$

la courbe $p' = -(p+1)$ sera réciproque de la podaire de (p), et par conséquent sa polaire réciproque par rapport au cercle de transformation $\rho = a$. L'angle des deux tangentes aux points des deux courbes situés sur le même rayon vecteur sera

$$V - V' = \omega\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right).$$

Si l'on considère les courbes définies par les trois paramètres

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p+1}, \quad -\frac{1}{p+1},$$

soit

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n+m}, \quad \frac{-m}{m+n},$$

c'est-à-dire une courbe, sa podaire et sa polaire réciproque, appartenant toutes les trois à la même division

(courbes continues, courbes à rebroussement, courbes à centre), le nombre m des branches reste le même, mais leur amplitude dans les deux dernières est de π supérieure à celle de la première pour chaque boucle, comme il est du reste évident *à priori*, puisque les rayons extrêmes de la podaire sont les perpendiculaires sur les rayons extrêmes de la courbe primitive symétriques l'un de l'autre par rapport au rayon vecteur normal, axe commun aux trois courbes.

Remarque IV. — L'angle des tangentes aux extrémités de deux rayons vecteurs est égal à la fraction constante

$$\frac{1}{p}+1=\frac{p+1}{p}=\frac{m+n}{n}, \quad \text{ou} \quad 1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q},$$

de l'angle de ces rayons vecteurs.

Remarque V. — Comme corollaire : Les tangentes aux n points d'intersection d'un même rayon vecteur avec les diverses boucles, ou branches, sont parallèles aux côtés d'un polygone régulier de $2n$ côtés. En effet, les angles

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_n$$

correspondant aux rotations

$$\omega+[0, \pi, 2\pi, \ldots, (n-1)\pi]$$

sont respectivement égaux à

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{p}+\frac{1}{p}[0, \pi, 2\pi, \ldots, (n-1)\pi].$$

Remarque VI. — Si l'on considère une même courbe (p) dans deux positions ne différant que par l'orientation de leurs axes faisant autour du pôle commun l'angle β, les tangentes aux points situés sur le même rayon vec-

teur dans l'une et l'autre courbe seront inclinées l'une sur l'autre de l'angle $\frac{\beta}{p}$. En conséquence :

Remarque VII. — Si l'on a une série de courbes (p) de même pôle et homothétiques, elles auront pour trajectoires orthogonales la série des courbes (p), semblables, de même pôle et dont les axes sont inclinésde l'angle $p\frac{\pi}{2}$ sur ceux des premières.

Les trajectoires coupant toutes les courbes de la série sous l'angle constant $\frac{\beta}{p}$ sont les courbes semblables, désorientées de l'angle β.

Caustiques par réflexion du pôle. — Le pôle étant considéré comme point lumineux, la caustique secondaire de la courbe

$$\rho = a \cos^p \frac{\omega}{p}$$

sera la courbe

$$\rho' = 2a \cos^{p+1} \frac{\omega}{p+1};$$

on sait en construire le centre de courbure, ou point brillant. La caustique par réflexion du pôle sur la courbe considérée comme miroir est donc connue par points.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (¹);

PAR M. ERNEST CESÁRO.

Parmi toutes les droites invariablement reliées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale en un point M *quelconque d'une*

(¹) Généralisation d'un théorème de M. Appell.

courbe, autre qu'une hélice, il n'y a que les droites suivantes qui engendrent une surface développable :

1° *La tangente, et les parallèles à la tangente situées dans le plan tangent;*

2° *La droite polaire, et les parallèles à la droite polaire situées dans le plan mené par cette droite parallèlement au plan tangent ;*

3° *Les tangentes à la parabole du plan osculateur, qui a son sommet en* M, *son foyer au centre de courbure ;*

4° *Les tangentes à la parabole du plan normal, qui a son sommet au centre de courbure, son foyer en* M.

I. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite représentée par les équations

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}$$

engendre une surface développable est

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}(B\,dC-C\,dB)\,dx+(C\,dA-A\,dC)\,dy\\ \qquad\qquad +(A\,dB-B\,dA)\,dz=0.\end{array}\right.$$

Prenons comme axes la tangente, la binormale et la normale principale en un point M de la courbe, et considérons le trièdre formé par les mêmes droites, au point M' infiniment voisin. On trouve aisément que les cosinus directeurs des anciennes directions des arêtes du trièdre, par rapport aux nouvelles, sont

T..............	1,	0,	$-\varepsilon$,
B..............	0,	1,	$-\eta$,
N..............	ε,	η,	1,

ε et η étant les angles de contingence et de torsion. Parmi les huit trièdres trirectangles formés par les trois droites en question, on a choisi celui qui contient l'élé-

ment de courbe MM'. Soient D, D' deux positions infiniment voisines d'une droite invariablement liée au trièdre. Soient A, B, C les cosinus directeurs de D par rapport aux anciens axes, ou de D' par rapport aux nouveaux. Une formule connue donne immédiatement

$$\begin{cases} A + dA = \cos(D', T) = A - C\varepsilon, \\ B + dB = \cos(D', B) = B - C\eta, \\ C + dC = \cos(D', N) = A\varepsilon + B\eta + C, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} dA = - C\varepsilon, \\ dB = - C\eta, \\ dC = A\varepsilon + B\eta. \end{cases}$$

Des considérations analogues nous donneraient

$$\begin{cases} dx = - \varepsilon z + ds = (\rho - z)\varepsilon, \\ dy = - \eta z, \\ dz = \varepsilon x + \eta y. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'égalité (1), celle-ci devient

$$\begin{aligned} & B(Cx - Az - A\rho)\varepsilon^2 + A(Bz - Cy)\eta^2 \\ & \quad - [A(Cx - Az - A\rho) + B(Bz - Cy) - \rho]\varepsilon\eta = 0. \end{aligned}$$

Si la courbe n'est pas une hélice, le rapport $\frac{\varepsilon}{\eta}$ varie, et il faut, pour que la condition ci-dessus soit remplie, que les coefficients de ε^2, η^2, $\varepsilon\eta$ soient séparément nuls. On doit donc avoir

$$(2) \quad \begin{cases} B(Cx - Az - A\rho) = 0, \\ A(Bz - Cy) = 0, \\ A(Cx - Az - A\rho) + B(Bz - Cy) = \rho. \end{cases}$$

On ne peut supposer A et B nuls tous les deux, ou tous les deux différents de zéro, car, dans l'un et l'autre cas,

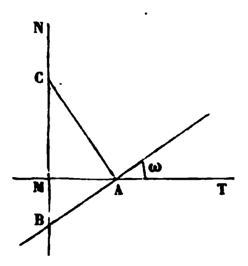
la troisième des conditions (2) ne serait pas remplie. Nous devons donc supposer B nul et A différent de zéro, ou bien l'inverse.

II. $B = 0$ (parallèles au plan osculateur). On doit avoir

$$\begin{cases} Cy = 0, \\ A(Cx - Az) = (1 - A^2)\rho. \end{cases}$$

1° $C = 0$ ($A = 1$, parallèles à la tangente). La deuxième condition devient $z = 0$ (plan tangent).

2° $y = 0$ (plan osculateur). En posant $A = \cos\omega$,



$C = \sin\omega$, la deuxième condition devient

$$(3) \qquad x \sin\omega \cos\omega - z \cos^2\omega = \rho \sin^2\omega.$$

Soit AB la position de la droite pour une valeur déterminée de ω. On a, en faisant $z = 0$ dans l'équation (3),

$$MA = \rho \operatorname{tang}\omega.$$

Or, si l'on élève AC perpendiculaire à AB, on a évidemment

$$MA = MC \operatorname{tang}\omega,$$

d'où l'on conclut que C est le centre de courbure. L'enveloppe des droites AB est donc l'antipodaire de MT par rapport au pôle C. C'est, d'après une propriété connue, la parabole ayant son sommet en M et son foyer en C.

III. $A = 0$ (parallèles au plan normal). On doit avoir

$$\begin{cases} Cx = 0, \\ B(Bz - Cy) = \rho. \end{cases}$$

1° $C = 0$ ($B = 1$, parallèles à la binormale). La deuxième condition devient $z = \rho$ (plan mené par le centre de courbure parallèlement au plan tangent).

2° $X = 0$ (plan normal). En posant $B = \cos\omega$, $C = \sin\omega$, la deuxième condition devient

$$z\cos^2\omega - y\sin\omega\cos\omega = \rho,$$

ou bien, si l'on transporte l'origine en C,

$$z\cos^2\omega - y\sin\omega\cos\omega = \rho\sin^2\omega.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (3) que par le changement de ρ en $-\rho$ (et de x en y). L'enveloppe des droites qu'elle représente est donc une parabole égale à la première, mais tournée en sens inverse, c'est-à-dire ayant son sommet en C et son foyer en M.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES QUESTIONS 1395 ET 1387

(voir 3e série, t. I, p. 143 et 141);

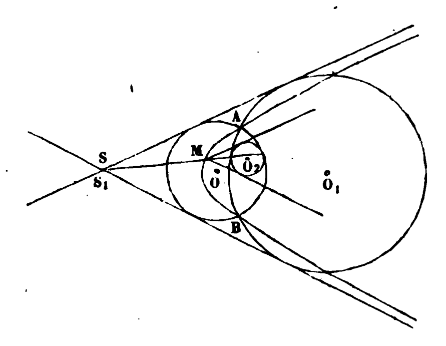
PAR M. C. CHATEAU,
Élève du Lycée Condorcet.

Par un point quelconque M d'une hyperbole, on mène des droites parallèles aux asymptotes; par un autre point A pris arbitrairement sur l'hyperbole, on mène deux cercles, tangents aux asymptotes et ayant leurs centres sur l'axe transverse de la courbe : démontrer que ces deux droites et ces deux cercles sont tangents à un même cercle.

Considérons le cercle O comme la directrice d'un cône

dont le sommet se projette en S, le contour apparent du cône se composant des asymptotes de l'hyperbole.

Supposons que nous fassions glisser ce cône parallèlement à lui-même, de manière que son sommet décrive la verticale du point S perpendiculaire au plan de la figure :



le cercle d'intersection avec le plan de base se déplacera en restant tangent au contour apparent primitif, et il arrivera un moment où le cône transporté aura pour directrice la circonférence O_1 dans le plan de base; soit S_1, coïncidant avec S, la projection du sommet transporté. Je dis que l'hyperbole est précisément la projection de l'intersection de ces deux cônes.

En effet, ces deux cônes, étant homothétiques, ont une section plane commune à l'infini : ils se coupent donc suivant une seconde courbe plane, et, comme les génératrices de contour apparent sont parallèles, cette courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces génératrices de contour apparent, et de plus situées dans les plans tangents suivant ces génératrices. D'ailleurs cette hyperbole passe par les deux points A et B, puisque ces points sont à la fois situés sur les deux bases. Donc l'hyperbole d'intersection a bien pour projection l'hyperbole donnée.

Cela posé, considérons un point quelconque M de l'intersection et joignons-le aux deux sommets; puis supposons que nous fassions glisser le cône S parallèlement à lui-même, de façon qu'il ait toujours la génératrice SM commune avec le cône primitif : il lui sera tangent. Amenons le sommet S en M : alors le cône ainsi transporté aura sa section par le plan de la figure tangente à la base O du premier cône. Supposons maintenant que nous fassions subir la même opération au cône S_1 : une fois le sommet S_1 amené en M, le cône ainsi transporté sera également coupé par le plan de la figure suivant un cercle tangent à O_1. Mais, le cône S_1 n'étant que le cône S transporté parallèlement à lui-même, les deux cônes S et S_1, transportés de manière à avoir leur sommet en M, coïncident. Leur base O_2 est donc à la fois tangente aux deux cercles O et O_1; et, de plus, comme elle est tracée sur le cône qui a son sommet en M, elle est tangente au contour apparent de ce cône, c'est-à-dire aux parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par M.

Les deux génératrices de contact SM, S_1M ayant même projection, il en résulte que la droite SM passe par les points de contact du cercle O_2 avec les deux premiers.

Il résulte de la démonstration précédente qu'en faisant varier le point M sur l'hyperbole, le cercle O_2 se déplace en restant tangent aux deux premiers, les tangentes à ce cercle issues de M restant parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. On a donc ce théorème :

Soient deux cercles fixes C *et* C' *tangents aux droites* D *et* D'; *on considère un cercle variable* K *qui touche* C *et* C' *et on lui mène des tangentes parallèles à* D *et à* D' : *le lieu de leur point de rencontre est une hyperbole passant par les points de rencontre à distance finie des cercles* C *et* C' *et ayant* D *et* D' *pour asymptotes.*

Supposons que, au lieu de déplacer le cône S sur la verticale SS_1 d'un même côté du plan de la figure, nous le déplacions de manière à l'amener en S_1 de l'autre côté du plan par rapport à S : alors ce sera la seconde nappe du cône qui sera coupée par le plan de base. Les raisonnements faits précédemment s'appliquent également à ce cas.

Si l'un des systèmes de tangentes communes aux deux cercles est imaginaire, les deux cônes ont alors un système de plans tangents communs imaginaires, puisque la trace du plan tangent commun aux deux cônes est précisément la tangente commune aux deux bases. Or on voit que, dans ce cas, l'intersection des deux cônes est une ellipse. La projection de cette ellipse est donc le lieu des points de rencontre des droites imaginaires tangentes au cercle variable et menées parallèlement aux deux tangentes communes imaginaires : ce lieu est réel.

SOLUTION ANALYTIQUE DES QUESTIONS 1387 ET 1395;

PAR M. L. CHAUCHAT,
Élève du Lycée Condorcet.

Prenons pour axes les bissectrices de l'angle des tangentes communes D et D'; soit tangφ le coefficient angulaire de D. Le cercle C a pour équation

$$(x-a)^2+y^2=a^2\sin^2\varphi$$

ou

$$x^2+y^2-2ax+a^2\cos^2\varphi=0.$$

Le cercle C' a pour équation

$$x^2+y^2-2a_1x+a_1^2\cos^2\varphi=0.$$

Soient (α, β) le centre de l'un des cercles mobiles et λ le rayon de ce cercle. Un point du lieu sera donné par l'intersection d'une parallèle $y = \beta$ à l'axe des x et d'une droite dont la distance au point (α, β) est égale à λ. On aura donc

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (a \sin\varphi + \lambda)^2,$$
$$(\alpha - a_1)^2 + \beta^2 = (a_1 \sin\varphi + \lambda)^2,$$
$$y = x \operatorname{tang}\varphi + n,$$
$$y = \beta,$$
$$\frac{\beta - \alpha \operatorname{tang}\varphi - n}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi}} = \lambda.$$

Remplaçant β par y et supprimant la quatrième équation, on a

(1) $$(\alpha - a)^2 + y^2 = (a \sin\varphi + \lambda)^2,$$
(2) $$(\alpha - a_1)^2 + y^2 = (a_1 \sin\varphi + \lambda)^2,$$
(3) $$y - n = x \operatorname{tang}\varphi,$$
(4) $$\frac{y - \alpha \operatorname{tang}\varphi - n}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi}} = \lambda.$$

Remplaçant, dans l'équation (4), $y - n$ par sa valeur tirée de l'équation (3), il vient

(5) $$(x - \alpha)\sin\varphi = \lambda.$$

Si l'on ordonne l'équation (1) en a, on aura une équation du deuxième degré dont les racines seront a et a_1. De cette équation

$$a^2\cos^2\varphi - 2a(\alpha + \lambda \sin\varphi) + y^2 + \alpha^2 - \lambda^2 = 0,$$

on tire

(6) $$(a + a_1)\cos^2\varphi = 2\alpha + 2\lambda \sin\varphi,$$
(7) $$aa_1 \cos^2\varphi = y^2 + \alpha^2 - \lambda^2.$$

Les équations (5) et (6) étant du premier degré en α et λ, on les résout, et l'on porte les valeurs trouvées dans l'équation (7); on a l'équation du lieu demandé.

Les valeurs de α et de λ sont

$$\alpha = \frac{a+a_1}{2} - x\,\mathrm{tang}^2\varphi,$$

$$\lambda = \frac{x\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{a+a_1}{2}\sin\varphi,$$

et l'équation du lieu

$$aa_1\cos^2\varphi = y^2 + \left[\frac{(a+a_1)^2}{4} - x^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right]\cos^2\varphi,$$

ou

$$4y^2 - 4x^2\,\mathrm{tang}^2\varphi + (a-a_1)^2\cos^2\varphi = 0.$$

C'est une hyperbole rapportée à ses axes, ayant pour asymptotes les tangentes communes et passant par les points de rencontre des deux cercles, car ces points peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul tangents aux cercles C et C'.

On déduit de là, en raisonnant comme dans la solution de M. Château, le théorème qui fait l'objet de la question 1395.

Note. — Solution analytique de la même question par M. Moret-Blanc.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours d'Astronomie nautique, par M. *H. Faye*, membre de l'Institut. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 10fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1880.

О нѣкоторыхъ полиномахъ съ одною и многими перемѣнными, par M. *Gérassime Orlow*. In-4°. — Saint-Pétersbourg; 1881.

Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. les Secrétaires

perpétuels. Tome V. Prix : 20fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS pour l'an 1882. Météorologie, Agriculture, Hygiène. In-18, avec figures dans le texte. Prix : 2fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

COURS DE TRIGONOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, par M. *A. Rebière,* professeur au lycée Saint-Louis. In-8°. Prix : 3fr, 50. — Paris, Germer-Baillière et Cie; 1882.

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire, par M. *J. Caron.* In-8°, avec atlas de 16 planches. Prix : 6fr. — Paris, Germer-Baillière et Cie; 1882.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE, rédigées conformément au programme du 2 août 1880, pour les classes de sixième et de cinquième, par M. *A. Ducatel,* professeur au lycée Condorcet. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 2fr. — Paris, G. Masson; 1882.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, par M. *C. Jordan,* membre de l'Institut. Tome I : Calcul différentiel. In-8°, avec figures dans le texte. Prix ; 11fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

TRAITÉ D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des candidats au baccalauréat, par M. *J. Collin.* In-8°. Prix : 5fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, par M. *Edouard Lucas.* Petit in-8°. Prix : 7fr, 50.—Paris, Gauthier-Villars; 1882.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS, par *G. Salmon,* traduit de l'anglais sur la 4e édition par M. *O. Chemin.* Ire Partie : Lignes et surfaces du premier et du second ordre. In-8°. Prix : 7fr. — Paris, Gauthier-Villars ; 1882.

ELÉMENTS DE MÉCANIQUE, rédigés conformément au programme du plan d'études des lycées, par M. *J. Vieille.*

4[e] édition, revue, corrigée et augmentée. In-8°. Prix : 4[fr],50. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, par *Chéfik-Bey Musour*. Tome I : Calcul différentiel. In-8°, en arabe.— Le Caire; 1882.

LE PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE CURVE DI SECOND' ORDINE, studiate sulla equazione generale di secondo grado in coordinate cartesiane. Lezioni date nella regia Università di Torino dal professore *Enrico d'Ovidio*. 2[a] edizione, riveduta ed aumentata. In-8°. Prix : 3[fr], 50. — Torino, Ermanno Loescher; 1883.

A TREATISE ON HYDROMECHANICS. — Part I : HYDROSTATICS, by *W.-H. Besant*, M. A., F. R. S., Mathematical lecturer of Saint John's college, Cambridge. Fourth edition. — Cambridge, Deighton, Bell and C°. London, G. Bell and Sons; 1883.

HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES, par M. *Maximilien Marie*, répétiteur de Mécanique et examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Tome I : de *Thalès à Diophante*. Petit in8°. Prix : 6 fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1883.

TIRAGES A PART.

Mémoire de Géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces du second ordre et des surfaces de révolution, soit entre elles-mêmes, soit avec quelques surfaces particulières; par ALFREDO AUGUSTO SCHIAPPA MONTEIRO DE CARVALHO, professeur à l'École Polytechnique de Lisbonne. In-8°. — Coïmbre, imprimerie de l'Université; 1875.

Note sur l'étude de M. J. de la Gournerie à l'égard de la division homographique de deux droites; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas*.

Sur une question proposée dans le « Journal de Mathématiques élémentaires »; par LE MÊME. — Sans lieu ni date.

Note de Géométrie descriptive, sur l'intersection des surfaces de révolution d'un ordre quelconque; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

Note sur l'angle d'une courbe avec une droite; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

Généralisation de la méthode de M. Chapuy; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

Solução da questão proposta n° 17; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

Solução da questão proposta n° 1 do vol. II, empregando o methodo das equipollencias e sua comparação com a solução geometrica elementar; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, vol. II.

Sobre a area lateral e volume d'uma cunha conica; par LE MÊME. Extrait du *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, vol. II.

Observations sur l'origine naturelle et géométrique du calcul des équipollences; par M. LAQUIÈRE. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des Sciences*; 1881.

Quelques réflexions sur les origines des idées géométriques; par M. LAQUIÈRE. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des Sciences*; 1881.

Démonstration rationnelle des premiers principes des déterminants; par M. LAQUIÈRE. Extrait des *Mémoires*

de l'Association française pour l'avancement des Sciences; 1881.

Exemples d'équations numériques non résolubles par radicaux; par M. A.-E. Pellet. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des Sciences*; 1881.

Liste des travaux sur les ovales de Descartes; par M. V. Liguine. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI; 1882.

Considérations sur les études géométriques et cinétiques de M. Habich, de Lima, par M. l'abbé Aoust. Extrait des *Mémoires de la Société scientifique de Marseille*.

Sur le centre des médianes anti-parallèles et sur un hexagone équilatéral inscrit à un triangle donné; par M. J. Neuberg. Extrait de *Mathesis*, t. I.

Les deux plus anciens Traités français d'Algorisme et de Géométrie; publiés par M. Ch. Henry. Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. XV; 1882.

Sur quelques propositions inédites de Fermat; Note de M. Ch. Henry. Extrait des *Memorie della reale Accademia dei Lincei*, serie 3a, vol. VIIo; 1882.

Sur une propriété de la diffraction des ondes planes dans les systèmes de petites ouvertures et sur la théorie de l'arc-en-ciel; par le P. J. Delsaulx. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 6e année; 1882.

Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé; par M. G. Koenigs. Thèse pour le doctorat. In-4°. Prix : 5fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungs-Methoden; von Wilh. Fiedler. Extrait de la

Vierteljahrsschrift der Zürch. Natur. Gesellschaft, t. XXVII; 1882.

Lo spazio delle omologie affini di un piano posto in relazione con lo spazio delle coniche dello stesso piano; pel dott. LUIGI CERTO. Extrait du *Giornale di Matematiche,* t. XX; 1883.

Aggiunte a recenti lavori dei Sig. Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa; di F. CASORATI. Extrait des *Annali di Matematica pura ed applicata,* 2e série, t. X; 1882.

O krivuljah u ravnini; napisao Dr K. ZAHRADNIK. Prvi dio. Prestampano iz LXIV *knj. Rada jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti;* 1882.

Vlastitosti nekih trojina tocaka na cisoidi; napisao Dr K. ZAHRADNIK. Prestampano iz LXI *knj. Rada jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti;* 1882.

Johns Hopkins University circulars; published with the approbation of the Board of Trustees. Vol. II, nos 19 et 20. Baltimore; 1882.

Premiers éléments de la Géométrie descriptive, par M. A. MANNHEIM, lieutenant-colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique. Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. I; 1882.

QUESTIONS.

1431. Démontrer que l'expression

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \left(\frac{n}{n+3}\right)^p + \cdots\right]$$

tend vers $\frac{1}{p-1}$, lorsque n augmente indéfiniment.

(E. CESÀRO).

1432. Parmi les chiffres de rang $4p+1$ des puissances successives de 5, les chiffres 3 et 8 se trouvent en plus petit nombre que tous les autres. Par exemple, parmi les 640 chiffres de rang 9 (centaines de millions) de 640 puissances successives quelconques de 5, chacun des chiffres 3 et 8 se trouve soixante fois, tandis que chacun des huit autres chiffres s'y trouve soixante-cinq fois. (E. Cesàro.)

1433. 1° Il n'y a que dix-huit espèces de polyèdres aux sommets desquels les faces de même ordre concourent en même nombre.

2° Il n'y a que dix-huit espèces de polyèdres, dont chaque face contient les sommets de même ordre en même nombre.

3° Ces polyèdres sont les seuls susceptibles de devenir réguliers ou semi-réguliers. (E. Cesàro.)

1434. L'angle de deux hyperboles équilatères, concentriques, est double de l'angle de leurs asymptotes.

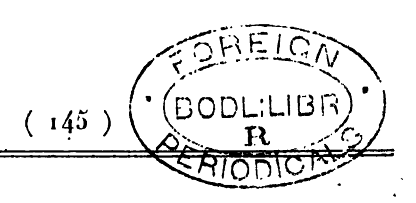
(E. Cesàro.)

1435. Quatre semi-droites A, B, C et D sont données; soient *a* le point où A est touchée par le cycle inscrit dans le triangle ABC, et *d* le point où D est touchée par le cycle inscrit dans le triangle DBC : démontrer que le point milieu du segment *ad* est sur l'axe radical des cycles inscrits dans les triangles ABD et ACD.

(Laguerre.)

1436. On peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole qui touchent une tangente à cette courbe : démontrer que cette tangente et les tangentes aux points d'osculation touchent un même cercle.

(Laguerre.)



MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

1. Dans ce Mémoire, je me propose de faire connaître une méthode nouvelle pour l'élimination de plusieurs inconnues entre plusieurs équations algébriques en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues; le travail auquel je me suis livré jettera, j'espère, quelque lumière sur la théorie de l'élimination.

J'admettrai dans ce qui va suivre le théorème de Bézout sur l'équation finale, ainsi que ses conclusions relativement au nombre des solutions de plusieurs équations à plusieurs inconnues, lorsqu'il n'existe aucune relation particulière entre les coefficients de ces équations.

2. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_n$; je dirai que, les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant *diviseurs*, les polynômes F et f sont *équivalents*, lorsqu'il existera des polynômes entiers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + f.$$

Un polynôme f sera dit *réduit* par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, quand il ne contiendra pas de termes divisibles par $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$. *Réduire* un polynôme F, ce sera trouver son équivalent f réduit.

Remarque. — Les définitions que nous venons de donner dépendent de l'ordre dans lequel on range les polynômes diviseurs φ et les variables x, mais cette dis-

tinction disparaît quand on suppose $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$, et alors nos théorèmes gagnent en élégance et en symétrie.

THÉORÈME. — *Le nombre des termes d'un polynôme réduit par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est* Πm.

En effet,

$$\begin{aligned}&(1 + x_1 + x_1^2 + \ldots + x_1^{m_1-1})\\ &\quad\times(1 + x_2 + \ldots + x_2^{m_2-1})\ldots(1 + x_n + \ldots + x_n^{m_n-1})\end{aligned}$$

est un polynôme réduit dont tous les coefficients sont égaux à un; le nombre de ses termes s'obtiendra en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, ce qui donne Πm : c'est le nombre des termes d'un polynôme réduit quelconque.

3. Dans ce qui va suivre, les termes des polynômes que nous aurons à considérer seront de la forme $A x_1^i x_2^j \ldots x_n^k$; A sera ce que nous appellerons le *coefficient* du terme, et $x_1^i x_2^j \ldots x_n^k$ sera son *argument*, nous conformant en cela à un usage adopté déjà par un certain nombre de géomètres.

Soient

$$\begin{matrix}\alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n},\\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n},\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\end{matrix}$$

les solutions des équations

$$(2)\qquad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \ldots,\quad \varphi_n = 0;$$

soit

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

le déterminant fonctionnel de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; *soit de plus*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{11}^{m_1-1} & \alpha_{12}^{m_2-1} & \ldots & \alpha_{1n}^{m_n-1}\\ 1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{21}^{m_1-1} & \alpha_{2}^{m_2-1} & \ldots & \alpha_{2n}^{m_n-1}\\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

(*dans ce déterminant* Δ *la* $i^{\text{ème}}$ *ligne a pour éléments les arguments d'un polynôme réduit en* $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$); *on aura*

$$\Delta^2 = G \Pi D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}), \tag{3}$$

G *désignant une quantité indépendante de* z, *en appelant* z *une variable entrant dans les coefficients de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *de manière à les rendre homogènes en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et* z *leurs degrés restants* $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

En d'autres termes, G ne dépend que des coefficients $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, qui multiplient des arguments de degré m_1 dans φ_1, de degré m_2 dans φ_2, etc.

En effet, Δ changeant de signe quand on échange deux de ses lignes, Δ^2 sera une fonction symétrique des solutions de (2), ce sera une fonction entière de la variable z. Le second membre de (3) est aussi une fonction entière de z; or ce second membre s'annule dès que l'on suppose que les équations (2) ont une solution double, tout comme le premier membre Δ^2; mais le second membre ne s'annule que dans cette circonstance; tout ce que l'on peut affirmer dès à présent, c'est que (2) a lieu pour une certaine valeur de G qui est un polynôme entier en z. Si nous prouvons que les deux membres de (3) sont de mêmes degrés en z, il sera établi que G est indépendant de z.

Or soit δ_ν le nombre des termes de degré ν dans un polynôme réduit; le degré de Δ par rapport aux α et par suite par rapport à z sera $\Sigma\nu\delta_\nu$; or δ_ν est le coefficient de t^ν dans

$$\begin{aligned} T = (1 + t + t^2 + \ldots + t^{m_1-1}) \\ \times (1 + t + \ldots + t^{m_2-1}) \ldots (1 + t + \ldots + t^{m_n-1}), \end{aligned}$$

δ_ν est le coefficient de $t^{\nu-1}$ dans $\frac{dT}{dt}$; enfin $\Sigma\nu\delta_\nu$ est la valeur

de $\frac{dT}{dt}$ pour $t = 1$; cette valeur est

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2} m_2 m_3 \ldots m_n + \frac{m_2(m_2-1)}{2} m_1 m_3 \ldots m_n + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \Pi m(\Sigma m - n);$$

le degré de Δ^2 est donc $\Pi m(\Sigma m - n)$. Or le degré de ΠD est le degré de D multiplié par Πm, c'est-à-dire précisément $\Pi m(\Sigma m - n)$: Δ^2 et ΠD sont donc de même degré et l'on a

$$\Delta^2 = G \Pi D,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Les polynômes réduits jouissent de propriétés remarquables qui les rapprochent des polynômes à une eule variable; ainsi :

On peut déterminer sans ambiguïté un polynôme réduit, lorsqu'on connaît les valeurs qu'il prend quand $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *s'annulent à la fois.*

Soit en effet F_i la valeur que doit prendre un polynôme réduit f quand on suppose

$$x_1 = \alpha_{i1}, \quad x_2 = \alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_{in}.$$

En posant

$$f = g_0 + g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_{m_1-1, m_2-1, \ldots} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots,$$

$g_0, g_1, \ldots$ désignant des coefficients numériques, on devra avoir

$$\begin{array}{l} F_1 = g_0 + g_1 \alpha_{11} + g_2 \alpha_{12} + \ldots, \\ F_2 = g_0 + g_1 \alpha_{21} + g_2 \alpha_{22} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

ces équations déterminent $g_0, g_1, \ldots$ et, par suite, f sans

ambiguïté, si le déterminant que nous avons appelé Δ n'est pas nul, ce qui ne peut avoir lieu que si les équations (2) ont une solution multiple; nous ferons abstraction de ce cas singulier, ainsi que du cas où ces équations auraient des solutions infinies ou indéterminées. En d'autres termes, les solutions de (2) seront toujours supposées finies et distinctes; elles sont, comme l'on sait, au nombre de $m_1 m_2 \ldots = \Pi m$.

On voit donc que, abstraction faite du cas où les équations (2) n'auraient pas Πm solutions finies, déterminées et distinctes, un polynôme réduit sera bien déterminé par les valeurs qu'il prend quand les diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ s'annulent à la fois. C. Q. F. D.

Il résulte de là que : *il existe toujours un, et un seul polynôme réduit, équivalent à un polynôme donné.*

[Bien entendu en supposant toujours les solutions de (2) distinctes, bien déterminées et finies.]

En effet, si f est l'équivalent réduit d'un polynôme F, on aura

$$F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + f,$$

et en annulant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, on voit que f sera égal à F; f est donc déterminé par toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annulant les φ, en vertu du théorème précédent; il aura donc une valeur unique et bien déterminée.

Pour calculer le polynôme réduit équivalent à F, on n'a pas besoin de connaître les solutions des équations (2) : c'est ce que nous allons établir.

Soient

$$\varphi_1 = \Sigma a_1 x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \quad \varphi_2 = \Sigma a_2 x_1^i \ldots x_n^k, \quad \ldots$$

les identités qui définissent les fonctions φ; multiplions la première par tous les arguments d'un polynôme de degré $p - m_1$, la seconde par tous les arguments d'un polynôme de degré $p - m_2$, et ainsi de suite : on ob-

tiendra

$$N(p-m_1)+N(p-m_2)+\ldots+N(p-m_n)$$

équations, $N(k)$ désignant en général le nombre des termes d'un polynôme complet de degré k à n variables. Je dis que ces équations sont en nombre suffisant pour déterminer tous les arguments non réduits de degré au moins égal à p en fonction des arguments réduits. Cherchons en effet le nombre de ces arguments non réduits; considérons en particulier l'un d'eux divisible par $x_i^{m_i}$; si l'on y supprime le facteur $x_i^{m_i}$, il se réduit à un argument de degré $p-m_i$ ou de degré inférieur. Prenons donc tous les arguments de degrés $p-m_1$, $p-m_2$, ... ou de degrés inférieurs. Multiplions-les par $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2}$, ..., nous obtiendrons tous les arguments cherchés au moins une fois : le nombre des arguments cherchés est donc au plus

$$N(p-m_1)+N(p-m_2)+\ldots+N(p-m_n),$$

qui est celui des équations dont on dispose pour les calculer; quand on aura calculé tous les arguments non réduits qui entrent dans un polynôme F donné, on pourra le mettre sous la forme $F=\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_n\varphi_n+f$, et f sera son expression réduite. Rien n'empêche d'ailleurs, puisque l'on sait que le polynôme réduit f existe, de le déterminer par la méthode des coefficients indéterminés.

5. *Il existe une infinité de polynômes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ donnant lieu à l'identité*

$$\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_n\varphi_n=0.$$

Si en effet, par exemple, on fait

$$\lambda_1=a_{11}\varphi_1+a_{12}\varphi_2+\ldots+a_{1n}\varphi_n,$$
$$\lambda_2=a_{21}\varphi_1+a_{22}\varphi_2+\ldots+a_{2n}\varphi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{ii}=0,\quad a_{ij}=-a_{ji}.$$

l'identité en question aura lieu, quels que soient d'ailleurs les quantités a_{ij}.

Il résulte de là que, s'il n'existe qu'un seul polynôme f réduit équivalent à un polynôme F, il existera une infinité de polynômes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, donnant lieu à l'identité

$$F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + f.$$

Aussi, quand on cherche à rendre cette formule identique par la méthode des coefficients indéterminés, ne faut-il pas s'étonner d'être en face d'un problème indéterminé.

On remarquera l'analogie du problème que nous venons de résoudre avec celui qui a pour but de trouver le quotient et le reste de deux polynômes entiers par rapport à une seule variable.

Supposons par exemple $\varphi_1 = x_1 - \alpha_1$, $\varphi_2 = x_2 - \alpha_2, \ldots$, $\varphi_n = x_n - \alpha_n$, l'équivalent réduit d'un polynôme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera indépendant de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et égal à $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; il y aura d'ailleurs une infinité de polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tels que l'on ait identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_1(x_1 - \alpha_1) + P_2(x_2 - \alpha_2) + \ldots + P_n(x_n - \alpha_n) + F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

On pourra prendre, par exemple,

$$P_1 = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - \alpha_1},$$

$$P_2 = \frac{F(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, x_n)}{x_2 - \alpha_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_n = \frac{F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{x_n - \alpha_n}.$$

Cette dernière remarque sera utilisée dans ce qui va suivre.

6. Dans la suite, nous aurons besoin de savoir résoudre le problème suivant :

Trouver un polynôme réduit nul pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *égales aux termes d'une solution des équations* (2), *excepté pour* $x_1 = \alpha_{i1}$, $x_2 = \alpha_{i2}, \ldots$, $x_n = \alpha_{in}$.

Le polynôme obtenu en remplaçant, dans Δ, α_{i1} par x_1, α_{i2} par $x_2, \ldots$, est une solution de la question, mais on peut en trouver une autre plus utile. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, on peut, et cela d'une infinité de manières, déterminer des polynômes P_{ij}, tels que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \\
&\quad = P_{11}(x_1 - \alpha_{i1}) + \ldots + P_{1n}(x_n - \alpha_{in}), \\
&\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \\
&\quad = P_{21}(x_1 - \alpha_{i1}) + \ldots + P_{2n}(x_n - \alpha_{in}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Posons alors

$$V = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix};$$

ce polynôme V s'annulera pour $x_1 = \alpha_{j1}$, $x_2 = \alpha_{j2}, \ldots$, quel que soit j, excepté pour $i = j$; car, pour $i = j$, il se réduira à $D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, qui est différent de o par hypothèse. Pour le prouver, il suffit d'observer que, d'après la définition même des polynômes P_{ij}, pour

$$x_1 = \alpha_{i1}, \quad x_2 = \alpha_{i2}, \quad \ldots,$$

on a

$$P_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i1}}, \quad P_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i2}}, \quad \ldots.$$

Le polynôme réduit équivalent à V sera une solution de la question, puisqu'il est égal à V quand les équations (2) sont satisfaites.

7. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'éliminer x_1, $x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

$$(4) \qquad F = 0,$$

la dernière étant de degré p en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et z.

A cet effet, posons

$$(5) \qquad Q = \sum \frac{u_i^2}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})},$$

$$(6) \qquad u_i = \xi_{000\ldots} + \alpha_{i1}\xi_{100\ldots} + \alpha_{i2}\xi_{010\ldots} + \ldots$$

u_i est un polynôme linéaire et homogène par rapport aux variables ξ dont les coefficients sont les arguments d'un polynôme réduit en $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$ par rapport aux diviseurs $\varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, en sorte que le déterminant de la substitution (6) qui permet d'exprimer les u en fonction des ξ est précisément celui que nous avons appelé Δ.

Le discriminant du polynôme Q homogène et du second degré par rapport aux ξ est égal au discriminant relatif aux u, à savoir $\Pi \frac{1}{FD}$, multiplié par le carré du déterminant de la substitution (6), à savoir $\Delta^2 = \Pi GD$: il est donc égal à $\frac{G}{\Pi F}$.

Changeons de variables et posons

$$(7) \qquad x_{p,q\ldots} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \xi_{p,q\ldots}} = \sum \frac{u_i \alpha_{i1}^p \alpha_{i2}^q \ldots}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)}.$$

Commençons à cet effet par résoudre les équations (7). A cet effet, appelons f_i un polynôme réduit nul en même temps que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, excepté pour $x_1 = \alpha_{i1}$, $x_2 = \alpha_{i2}, \ldots$; alors, en multipliant les équations (7) par

les coefficients de ce polynôme et en les ajoutant, on trouve la formule symbolique

$$(8)\qquad f_i(x_1.x_2,\ldots,x_n)=\frac{u_i f_i(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots)}{F(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots)D(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots)},$$

dans laquelle il faut supposer que, dans le développement du premier membre, on remplace $x_1^p\, x_2^q\ldots$ par $x_{p,q},\ldots$ Or on peut supposer $f_i(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots)=\Delta$, d'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent; donc, en remplaçant u_i dans (5) par sa valeur tirée de (8), on a symboliquement

$$(9)\qquad Q=\sum F(\alpha_{i1},\alpha_{i2}\ldots)\frac{f_i(x_1,x_2,\ldots)f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)D(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots)}{f_i^2(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots)},$$

formule dans laquelle il faudra faire

$$x_1^p\, x_2^q\ldots=\alpha_1^p\,\alpha_2^q\ldots=x_{p,q}\ldots,$$

après avoir développé le second membre. Appelons δ le nouveau discriminant de Q par rapport aux variables $x_{p,q},\ldots$; le discriminant de Q relatif aux u que nous avons trouvé égal à $\frac{1}{\Pi FD}$ est égal à δ multiplié par le carré du déterminant de la substitution donnant les x en fonctions de u [formule (7)]. Ainsi on a

$$\frac{1}{\Pi FD}=\delta\times\frac{\Delta^2}{(\Pi FD)^2},$$

d'où l'on tire

$$\delta=\Pi\,\frac{FD}{\Delta^2}=\frac{\Pi F(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in})}{G}:$$

le discriminant δ égalé à zéro donnera donc, en vertu d'un théorème connu, la résultante des équations proposées. Donc :

La résultante de plusieurs équations algébriques peut être mise sous la forme d'un déterminant symétrique.

La fonction Q, dont le discriminant égalé à zéro four-

nit la résultante, peut être mise sous une autre forme plus avantageuse pour le calcul.

Prenons $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ égal à l'équivalent réduit de $\Sigma \pm P_{11} P_{22} \ldots P_{nn}$, les polynômes P_{ij} étant définis comme au n° 6; alors $f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$ sera, comme on l'a vu, dans ce numéro, égal à $D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)$; on aura alors plus simplement

$$(10) \quad Q = \sum F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}{D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}.$$

Maintenant, désignons par $f(x_1, x_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ce que devient $f_i(x_1, x_2, \ldots)$, quand on y remplace α_{i1} par α_1, α_{i2} par α_2, ..., α_{in} par α_n, et considérons le polynôme Q avant d'y faire $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q} \ldots$; ce polynôme est alors un polynôme réduit qui, pour $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{12}$, ... se réduit à

$$F(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

qui, pour $x_1 = \alpha_{21}$, $x_2 = \alpha_{22}$, ..., se réduit à

$$F(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Ces conditions, comme on l'a vu au n° 4, le déterminent complètement. Or le polynôme réduit, équivalent à

$$F(x_1, x_2, \ldots) f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots),$$

jouit exactement des mêmes propriétés; il est donc égal à Q quand on y suppose $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q} \ldots$, et il est évident que, dans la même hypothèse, on aura aussi Q égal à

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) f(x_1, x_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Ainsi *la résultante des équations* (2), (4) *est le discriminant, égalé à zéro, du polynôme homogène du second*

degré obtenu en faisant $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q} \ldots$ *dans l'expression*

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) f(x_1, x_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Pour la facilité des calculs, on fera bien de prendre les polynômes P_i, comme il a été indiqué à la fin du n° 5 : la réduction est en effet alors partiellement effectuée.

8. Faisons toujours, comme plus haut,

$$(11) \quad \varphi_i(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = P_i(x_1 - \alpha_1) + \ldots + P_{in}(x_n - \alpha_n);$$

faisons de plus

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x_1, x_2, \ldots) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \\ \quad = P_{n+1,1}(x_1 - \alpha_1) + \ldots + P_{n+1,n}(x_n - \alpha_n); \end{array} \right.$$

enfin posons, en écrivant simplement $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, F$ au lieu de $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots,$

$$(12) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n & F \\ P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} & P_{n+1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} & P_{n+1,n} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant Θ est de la forme

$$(13) \qquad \Theta = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + \lambda F,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des polynômes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et z. Si nous désignons, pour simplifier, par φ'_1, $\varphi'_2, \ldots, F'$ les polynômes $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \ldots,$ $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, obtenus en changeant x_1 en α_1, x_2 en $\alpha_2, \ldots,$ dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, F$, il est facile de voir que l'on aura encore

$$(14) \qquad \Theta = \lambda_1 \varphi'_1 + \lambda_2 \varphi'_2 + \ldots + \lambda_n \varphi'_n + \lambda F';$$

en d'autres termes, le second membre de (11) n'est pas altéré quand on remplace la première ligne par $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, F'$; cela résulte des formules (11), car, si l'on multiplie la

seconde ligne du déterminant Θ par $-(x_1 - \alpha_1)$, la suivante par $-(x_2 - \alpha_2), \ldots$, et si on les ajoute à la première, on remplace, en vertu de (11), cette première ligne par $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, F'$.

Supposons maintenant que $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ soit une solution commune aux équations (2) et (4), Θ sera nul en vertu de (14); donc, en vertu de (13) :

Si les équations $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, F = 0$ *ont une solution commune, il existera une infinité de systèmes de multiplicateurs* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tels que l'on ait identiquement*

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + \lambda F = 0;$$

le multiplicateur λ_i, *en général, est de degré*

$$\Sigma m + p - n - m_i.$$

Cela posé, le polynôme Θ étant identiquement nul, en le réduisant par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots$, avec les diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, avec les diviseurs $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n$ qui sont nuls, on obtiendra un nouveau polynôme Θ_1 réduit, qui sera aussi identiquement nul; d'ailleurs, il est évident que le polynôme Θ_1 peut également s'obtenir en réduisant seulement $\lambda F'$, puisque la réduction de

$$\Theta = \lambda_1 \varphi'_1 + \lambda_2 \varphi'_2 + \ldots + \lambda F'$$

est déjà faite partiellement en supprimant

$$\lambda_1 \varphi'_1 + \ldots + \lambda_n \varphi'_n.$$

Ainsi le polynôme Θ_1 s'obtiendra en réduisant $\lambda F'$ ou $F' \Sigma \pm P_{11} P_{22} \ldots P_{nn}$; mais, Θ_1 étant identiquement nul, les coefficients des arguments $x_1^p x_2^q \ldots$ de ses divers termes seront nuls; en égalant ces coefficients à zéro, on aura un système d'équations en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, que j'appellerai (E), satisfait en supposant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

remplacés par une solution commune à (2) et à (4). Ces équations (E) sont en nombre égal à $m_1 m_2 \ldots m_n$, nombre des arguments d'un polynôme réduit; elles contiennent $m_1 m_2 \ldots m_n$ arguments $\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots$ sous forme linéaire et homogène; entre ces équations, on pourra éliminer les arguments $\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots$ en question.

Je dis que la résultante sera précisément la résultante des équations (2), (4).

En effet, le polynôme Θ_1 n'est autre chose que le polynôme que nous avons appelé Q dans le paragraphe précédent, avant d'y supposer

$$x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q\ldots};$$

les équations (E) ne sont autres que les équations $\frac{\partial Q}{\partial x_{p,q\ldots}} = 0$, quand on y suppose

$$\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q\ldots},$$

et, par suite, leur résultante n'est autre que le discriminant de Q égalé à zéro.

Cette remarque nous fait voir que la solution commune aux équations (2), (4), quand il y en aura une, sera donnée par les équations (E), qui non seulement feront connaître $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, mais encore tous les arguments réduits que l'on peut former avec ces quantités.

9. La possibilité d'appliquer notre méthode d'élimination suppose que les équations données soient telles que l'on puisse en choisir n, telles que leurs premiers membres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ puissent servir de diviseurs à un système de réductions; pour cela, il est nécessaire que les équations (2) n'aient pas, quel que soit z, une solution multiple ou infinie; le cas où les équations (2) auraient une solution infinie peut être facilement écarté au moyen d'une substitution linéaire, mais le cas où il

existerait une solution double ne peut pas être écarté aussi facilement, qu'elle soit finie ou infinie; si donc cette particularité se présentait, on la ferait disparaître en faisant varier infiniment peu les coefficients d'une ou plusieurs des équations données, ce qui, comme l'on sait, ne fait varier que très peu les solutions.

Reprenons les équations (E) : leur déterminant étant désigné par Z, la résultante cherchée sera $Z = 0$, et si l'on suppose que les coefficients des équations proposées. qui sont de degré k par rapport à la variable z, contiennent une variable t à la puissance k au plus, l'équation $Z = 0$ sera satisfaite pour $\Pi m.p$ valeurs de t; considérons l'une d'elles en particulier.

Si tous les mineurs de Z ne sont pas nuls, alors les équations (E) se réduisent à $\Pi m.p - 1$ distinctes et font connaître un système de valeurs des arguments $\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots$ unique, plusieurs d'entre eux pouvant être infinis.

Si tous les mineurs du premier ordre de Z sont nuls, d'abord $Z = 0$ admet t pour racine double, car, en appelant e un élément de Z et $\frac{\partial Z}{\partial e}$ le mineur correspondant, on a

$$\frac{dZ}{dt} = \sum \frac{\partial Z}{\partial e} \frac{de}{dt} = 0;$$

les équations (E) ne sont plus qu'au nombre de $\Pi m.p - 2$ distinctes; entre ces équations, on pourra éliminer tous les arguments, excepté x_1 et x_1^2, par exemple, ce qui fournira deux valeurs de x_1 et deux systèmes de valeurs correspondantes des autres inconnues.

Si tous les mineurs du second ordre de Z sont nuls, $Z = 0$ admet t pour racine triple; en effet, appelant e et e' deux éléments de Z, et $\frac{\partial^2 Z}{\partial e\, \partial e'}$ le mineur de z du se-

cond ordre correspondant, on a

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \sum\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial e\,\partial e'}\frac{de}{dt}\frac{de'}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial e}\frac{d^2 e}{dt^2}\right) = 0;$$

les équations (E) se réduisent à $\Pi m.p - 3$ distinctes et font connaître trois systèmes de valeurs des inconnues, et ainsi de suite; de sorte que, si Z n'est pas identiquement nul, le système (2), (4) admettra $\Pi m.p$ solutions, en comptant en général pour k solutions une solution multiple d'ordre k.

Lorsque le déterminant Z sera identiquement nul, quel que soit t, les équations proposées auront une solution, elles seront alors satisfaites pour une infinité de valeurs de $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$; mais, Z étant identiquement nul, ses mineurs ne le seront pas en général, mais pourront le devenir pour une valeur particulière de t; pour cette valeur, il y aura alors deux systèmes de valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on voit, du reste, comment on achèverait cette discussion, en examinant le cas où les mineurs du premier, du second ordre, etc., seraient identiquement nuls.

Lorsque trois surfaces du second ordre se coupent suivant une même génératrice, leurs points communs se composent de cette génératrice et des points communs à leurs courbes gauches d'intersection; dans ce cas, la résultante de leurs équations est identiquement nulle, et les mineurs de leur résultante s'annulent accidentellement.

NOTE SUR LA PONCTUATION;

PAR M. J. CARON,
Directeur des travaux graphiques à l'École Normale supérieure.

On se propose de représenter un système composé d'un certain nombre de surfaces P, Q, R, S, ... et d'établir la ponctuation en projection horizontale par exemple, ces surfaces étant d'ailleurs opaques et prolongées indéfiniment.

Considérons une verticale quelconque, et représentons par $p, q, r, s, \ldots$ les points de rencontre de cette verticale avec les surfaces correspondantes. Nous supposons ces points nommés dans l'ordre où ils se présentent, le point p étant le plus élevé. D'après les conventions admises, c'est-à-dire en supposant l'observateur placé à l'infini au-dessus du plan horizontal, le point p est le seul vu en projection horizontale, et il cache tous les autres $q, r, s, \ldots$.

Voyons ce qui se passe, lorsque la verticale variable se meut de manière à avoir son pied successivement dans toutes les régions du plan horizontal.

Nons entendons par région du plan horizontal tout contour formé par les projections horizontales des intersections des surfaces données prises deux à deux, et par les contours apparents horizontaux en projection de ces surfaces.

Soit (p, q) la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces P et Q : nous remarquerons qu'en faisant traverser uniquement la limite (p, q) par le pied de la verticale, il se produit une inversion dans l'ordre

des points p et q sur la verticale variable, c'est-à-dire qu'au lieu de lire sur la verticale primitive les points dans l'ordre $p, q, r, s, \ldots$, on les lira sur la nouvelle verticale dans l'ordre $q, p, r, s, \ldots$.

Plus généralement, en traversant uniquement une limite (m, n), il se produit dans l'ordre des lettres une inversion des mêmes lettres m et n, autrement dit, on passera de la disposition $pqr \ldots mn \ldots xy$ à la disposition $pqr \ldots nm \ldots xy$.

Nous remarquerons également qu'en traversant uniquement le contour (m, n), il ne doit exister, dans l'ordre des lettres sur la verticale, aucune lettre entre m et n avant ou après le passage sur la limite considérée; c'est-à-dire qu'il ne se produit jamais d'inversion qu'entre deux lettres successives.

Enfin, en supposant que les deux lettres p et q entre lesquelles se produit l'inversion soient placées les premières, c'est que la limite (p, q), intersection des deux surfaces P et Q, est vue en projection horizontale, car, d'un côté de cette ligne, on voit la surface P, et de l'autre la surface Q. Autrement, la limite (p, q) est cachée.

Dans la série des points $p, q, r, s, \ldots$, on peut en avoir appartenant à une même surface; représentons-les par la même lettre affectée d'un indice, $p, q, p_1, p_2, r, s, q_1, \ldots$. Si le pied de la verticale traverse le contour apparent de la surface P, les deux points p_1, p_2 disparaissent en même temps, et il nous reste les points $p, q, r, s, q_1, \ldots$.

A l'aide de ces considérations, nous allons démontrer deux théorèmes dont l'emploi permet d'effectuer assez rapidement une ponctuation.

THÉORÈME I. — *Si un point* M *commun à trois surfaces*

P, Q, R *est vu, en représentant un système de surfaces opaques* P, Q, R, S, ..., *il existe trois lignes passant par le point* M *et formant six rayons alternativement vus et cachés, en supposant toutefois qu'il n'existe pas de plan tangent commun en* M, *ni que le point* M *appartienne à un contour apparent.*

Les trois lignes passant par le point M sont évidemment les intersections des surfaces P, Q, R prises deux à deux, et de plus il n'y aura pas d'autres limites passant par le point M, que ces trois courbes (p, q), (q, r), (r, p). Cependant, il peut exister, dans le voisinage du point M, d'autres limites correspondant aux mêmes régions de surfaces, mais on peut toujours tracer une circonférence C, ayant pour centre le point M et n'atteignant aucune de ces limites. Enfin, nous négligeons les limites passant accidentellement par le point M en projection, parce qu'elles ne correspondent pas à des limites passant par le point M de l'espace, ce dernier point étant supposé vu. Ces nouvelles limites ne jouent alors aucun rôle, et l'on peut raisonner comme si l'on ne représentait que les régions de surfaces P, Q, R voisines du point M.

Faisons marcher le pied de la verticale sur la circonférence C, en partant d'un point quelconque a de cette circonférence, et en tournant dans un sens déterminé. Dans ce mouvement, nous allons rencontrer successivement les six rayons formés par les limites (p, q), (q, r), (r, p), et, par suite, nous établirons leur ponctuation.

Soit p, q, r l'ordre des points sur la verticale a; en marchant sur la circonférence, nous rencontrons l'un quelconque des rayons en un point α que nous pouvons toujours supposer vu; autrement dit, nous supposons le rayon $M\alpha$ vu.

En traversant la limite $M\alpha$ au point α, il se produira

une inversion entre deux lettres successives p, q ou q, r; de plus, le point α étant vu, l'inversion ne peut se produire qu'entre les deux premières lettres p et q. On passe donc de la disposition p, q, r à la disposition q, p, r, après avoir traversé le rayon Mα, qui d'ailleurs ne sera autre chose que l'intersection des deux surfaces P et Q.

Continuons de marcher sur la circonférence C, nous atteignons un nouveau rayon Mβ qui, assurément, ne sera pas la limite (p, q), puisque le point M est supposé simple. En traversant ce nouveau rayon Mβ au point β, il se produira une inversion qui, d'après ce que nous venons de dire, ne peut plus avoir lieu entre p et q. L'inversion possible a donc lieu entre p et r, et nous passons de la disposition q, p, r à la disposition q, r, p.

Cette nouvelle inversion n'ayant plus lieu entre les deux premières lettres, la limite traversée Mβ est cachée.

En continuant de tourner, nous traversons le rayon Mγ; la dernière disposition des points était q, r, p, et il ne peut plus se produire d'inversion entre les lettres p, r; on passe donc à l'ordre r, q, p, ce qui prouve que le nouveau rayon Mγ est vu.

On a donc bien rencontré successivement un rayon vu et un rayon caché et, par suite, le théorème est démontré.

Cette discussion peut se résumer dans le Tableau suivant, dans lequel nous avons donné le signe + aux rayons vus, et le signe — aux rayons cachés.

Marche de la verticale.

	a.	α.	b.	β.	c.	γ.	a_1.	α_1.	b_1.	β_1.	c_1.	γ_1.	a.
Ordre des points sur la verticale.	p	pq	q	q	q	qr	r	r	r	rp	p	p	p
	q		p		r		q		p		r		q
	r	r	r	pr	p	p	p	qp	q	q	q	rq	r
Ponctuation du rayon.		$+(pq)$		$-(pr)$		$+(qr)$		$-(pq)$		$+(rp)$		$-(rq)$	

Citons, comme application de ce théorème, la représentation d'un système de plans opaques et prolongés indéfiniment.

Après avoir déterminé les intersections de tous les plans deux à deux, on coupera tous ces plans par un même plan vertical, ce qui donnera un système de droites. Parmi tous les points de rencontre de ces différentes droites, on peut toujours en choisir un *m* placé au-dessus de toutes les droites; ce point est donc vu en projection horizontale. La limite passant par le point *m* sera vue aussi en projection horizontale, dans le voisinage du point *m*, jusqu'au premier point commun à trois plans. En ce point commun, on aura l'occasion d'appliquer le théorème, ce qui donnera deux nouveaux rayons vus, et l'on continuera par cheminement, jusqu'au moment où l'on ne rencontrera plus de points communs; tout le reste sera caché.

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une courbe d'intersection de deux surfaces traverse le contour apparent dans l'espace de l'une des deux surfaces, en un point vu, la région vue de cette courbe fait suite à un contour apparent vu, en représentant le système des deux surfaces opaques.*

Soient C le contour apparent en projection de la surface Q, et I la projection de l'intersection des deux surfaces P et Q. Par hypothèse, les deux courbes I et C sont tangentes en projection au point vu M, la courbe de l'espace I n'étant pas tangente au contour apparent de l'espace C. Nous supposons également que la courbe I ne présente ni point double, ni point de rebroussement en M.

De même que dans le théorème précédent, nous pouvons ne nous occuper que des régions des surfaces P

et Q voisines du point M. Traçons alors une circonférence A ayant son centre au point M, et dont le rayon sera choisi assez petit pour que cette circonférence n'atteigne aucune limite voisine du point M autre que I et C.

Faisons marcher le pied de la verticale sur la circonférence A, en partant d'un point a extérieur au contour apparent C. Cette verticale a coupera seulement la surface P en un point p. La verticale se déplaçant, elle coupera d'abord le contour apparent C en un point c, puis la courbe I au poin t i. Comme le point M sert de limite entre les parties vues et cachées de la courbe I, on peut toujours supposer que le point i est un point vu; nous allons en déduire la ponctuation du point c.

Or, en passant par le point c, la verticale coupe les deux surfaces aux points p et q placés dans l'ordre p, q ou dans l'ordre q, p, puis au delà du point c, le point q se dédouble, et nous avons les dispositions suivantes p, q_1, q_2 ou q_1, q_2, p.

En arrivant au point i, il se produit une inversion entre les lettres p et q, abstraction faite des indices; comme le point i est supposé vu, il faut que les deux lettres sur lesquelles se produit l'inversion soient placées les premières : donc la première disposition p, q_1, q_2 est la seule possible. Si nous revenons au point c, l'ordre des points était donc p, q, et non q, p, ce qui veut dire que le point c du contour apparent de la surface Q est caché.

La seconde partie du contour apparent de la surface Q est alors vue : donc elle fait suite, comme nous l'avions dit, à une région vue Mi de l'intersection. En résumé, dans le voisinage du point de contact, les régions vues de l'intersection et du contour apparent ne présentent jamais l'aspect d'un point de rebroussement.

SUR LES TRIANGLES CONJUGUÉS A UNE CONIQUE ET SUR LES TÉTRAÈDRES CONJUGUÉS A UNE QUADRIQUE;

Par M. HUMBERT,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Bar-le-Duc.

Je me propose d'exposer dans cette Note, relativement aux triangles polaires des coniques, aux diamètres conjugués dans les surfaces du second degré et aux tétraèdres polaires de ces surfaces, une méthode de calcul que je crois nouvelle.

Triangles polaires des coniques.

1. Nous supposerons l'équation de la conique donnée en coordonnées homogènes; soit

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

cette équation.

Le premier membre peut se mettre identiquement sous la forme

$$P^2 + P'^2 + P''^2,$$

où P, P', P'' désignent des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z,

$$\begin{aligned} P &\equiv ax + by + cz, \\ P' &\equiv a'x + b'y + c'z, \\ P'' &\equiv a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant les neuf cosinus directeurs de trois droites rectangulaires $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, et choisissons le système pour lequel leur déterminant $(\alpha\beta'\gamma'')$ est égal à $+1$.

Nous avons l'identité

$$(2)\quad \begin{cases} P^2 + P'^2 + P''^2 \equiv (\alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'')^2 \\ \quad + (\beta P + \beta' P' + \beta'' P'')^2 + (\gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'')^2 \end{cases}$$

ou

$$P^2 + P'^2 + P''^2 \equiv Q^2 + Q'^2 + Q''^2,$$

en posant

$$(3)\quad \begin{cases} Q \equiv \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'', \\ Q' \equiv \beta P + \beta' P' + \beta'' P'', \\ Q'' \equiv \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P''. \end{cases}$$

Les trois droites $Q = 0$, $Q' = 0$, $Q'' = 0$ sont les trois côtés d'un triangle polaire de la conique (1), et, si l'on y regarde α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' comme neuf quantités variables liées par les six relations connues, on voit que ce sont les équations générales des trois côtés d'un triangle polaire de la conique (1). Les expressions générales des coordonnées des trois sommets d'un triangle polaire s'obtiendront en résolvant les trois systèmes d'équations

$$(4)\quad \begin{cases} Q' = 0, \\ Q'' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Q'' = 0, \\ Q = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Q = 0, \\ Q' = 0, \end{cases}$$

par rapport à x, y, z.

Résolvons le premier système, nous aurons

$$\beta P + \beta' P' + \beta'' P'' = 0,$$
$$\gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' = 0;$$

d'où

$$\frac{P}{(\beta'\gamma'')} = \frac{P'}{(\gamma\beta'')} = \frac{P''}{(\beta\gamma')} = \theta.$$

Or on a

$$(\beta'\gamma'') = \alpha, \quad (\beta''\gamma) = \alpha', \quad (\beta\gamma') = \alpha'',$$

et l'on peut multiplier toutes les coordonnées homogènes d'un point par un nombre quelconque. Donc un système de valeurs des coordonnées homogènes du premier

sommet sera donné par les trois équations

$$P = \alpha,\quad P' = \alpha',\quad P'' = \alpha'',$$

ou

$$\begin{aligned} a x_1 + b y_1 + c z_1 &= \alpha, \\ a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 &= \alpha', \\ a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 &= \alpha''. \end{aligned}$$

On en tire

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= (b'c'')\alpha + (b''c)\alpha' + (bc')\alpha'', \\ y_1 &= (c'a'')\alpha + (c''a)\alpha' + (ca')\alpha'', \\ z_1 &= (a'b'')\alpha + (a''b)\alpha' + (ab')\alpha''; \end{aligned} \right.$$

de même, en résolvant les deux autres systèmes d'équations (4),

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= (b'c'')\beta + (b''c)\beta' + (bc')\beta'', \\ y_2 &= (c'a'')\beta + (c''a)\beta' + (ca')\beta'', \\ z_2 &= (a'b'')\beta + (a''b)\beta' + (ab')\beta''; \end{aligned} \right.$$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} x_3 &= (b'c'')\gamma + (b''c)\gamma' + (bc')\gamma'', \\ y_3 &= (c'a'')\gamma + (c''a)\gamma' + (ca')\gamma'', \\ z_3 &= (a'b'')\gamma + (a''b)\gamma' + (ab')\gamma''. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées des trois sommets d'un triangle polaire quelconque d'une conique.

2. Rappelons que les coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont liés aux coefficients A, A', A'', B, B', B'', par les relations suivantes :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= a^2 + a'^2 + a''^2, \\ A' &= b^2 + b'^2 + b''^2, \\ A'' &= c^2 + c'^2 + c''^2, \\ B &= bc + b'c' + b''c'', \\ B' &= ca + c'a' + c''a'', \\ B'' &= ab + a'b' + a''b''. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de ces relations, on a, entre x_1, y_1, z_1,

$x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, les relations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = A'A'' - B^2 = \mathcal{A}, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = A''A - B'^2 = \mathcal{A}', \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = AA' - B''^2 = \mathcal{A}'', \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = B'B'' - AB = \mathcal{B}, \\ z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 = B''B - A'B' = \mathcal{B}', \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = BB' - A''B'' = \mathcal{B}''; \end{cases}$$

les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'', \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ sont les coefficients de la forme adjointe ou de l'équation tangentielle.

Remarque I. — Dans le cas général où le discriminant n'est pas nul, les trois points 1, 2, 3 ne sont jamais en ligne droite, car le déterminant des lettres $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ est égal au déterminant des neuf cosinus, multiplié par le suivant

$$\begin{vmatrix} (b'c'') & (b''c) & (bc') \\ (c'a'') & (c''a) & (ca') \\ (a'b'') & (a''b) & (ab') \end{vmatrix},$$

qui est égal au carré du déterminant des fonctions linéaires P, P', P'', c'est-à-dire au discriminant. Nous ne nous servirons de nos formules que dans ce cas.

Remarque II. — Au lieu de l'équation ponctuelle, on eût pu se donner l'équation tangentielle de la conique sous la forme

$$(10)\quad Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0;$$

on eût obtenu de la même façon les coordonnées homogènes des trois côtés d'un triangle polaire quelconque. Il n'y a qu'à mettre, dans (5), (6), (7), u, v, w à la place de x, y, z, pour les obtenir. De même, en mettant u, v, w à la place de x, y, z dans les relations (9), on aura les six relations qui existent entre les neuf coordon-

nées homogènes des trois côtés d'un triangle polaire quelconque; $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ seront ici les coefficients de la forme adjointe à la forme (10), c'est-à-dire de l'équation ponctuelle de la conique (10).

3. On obtient aisément de nouvelles relations en résolvant (5) par rapport à α, α', α'', de même (6) par rapport à β, β', β'', (7) par rapport à γ, γ', γ'' :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a x_1 + b y_1 + c z_1 = P_1,\\
\Delta\alpha' &= a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 = P'_1,\\
\Delta\alpha'' &= a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 = P''_1,\\
\Delta\beta &= a x_2 + b y_2 + c z_2 = P_2,\\
\Delta\beta' &= a' x_2 + b' y_2 + c' z_2 = P'_2,\\
\Delta\beta'' &= a'' x_2 + b'' y_2 + c'' z_2 = P''_2,\\
\Delta\gamma &= a x_3 + b y_3 + c z_3 = P_3,\\
\Delta\gamma' &= a' x_3 + b' y_3 + c' z_3 = P'_3,\\
\Delta\gamma'' &= a'' x_3 + b'' y_3 + c'' z_3 = P''_3.
\end{aligned}\right.$$

De ces relations, on déduit encore

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
P_1^2 + P_1'^2 + P_1''^2 &= \Delta^2,\\
P_2^2 + P_2'^2 + P_2''^2 &= \Delta^2,\\
P_3^2 + P_3'^2 + P_3''^2 &= \Delta^2,\\
P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 &= \Delta^2,\\
P_1'^2 + P_2'^2 + P_3'^2 &= \Delta^2,\\
P_1''^2 + P_2''^2 + P_3''^2 &= \Delta^2;
\end{aligned}\right.$$

Δ désigne le déterminant des fonctions linéaires P, P', P'', dont le carré Δ^2 est le discriminant de la conique.

4. Cherchons maintenant si une conique

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) = a x^2 + a' y^2 + a'' z^2&\\
+ 2 b y z + 2 b' z x + 2 b'' x y &= 0
\end{aligned}\right.$$

est ou non circonscrite à un triangle polaire de la co-

nique (1). Il faudra pour cela que les trois équations

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, y_1, z_1) &= ax_1^2 + a'y_1^2 + \ldots + 2b''x_1y_1 = 0,\\ \varphi(x_2, y_2, z_2) &= ax_2^2 + a'y_2^2 + \ldots + 2b''x_2y_2 = 0,\\ \varphi(x_3, y_3, z_3) &= ax_3^2 + a'y_3^2 + \ldots + 2b''x_3y_3 = 0\end{aligned}$$

soient simultanément satisfaites; leur somme devra être nulle, et l'on aura

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, y_1, z_1) + \varphi(x_2, y_2, z_2) + \varphi(x_3, y_3, z_3)\\ = a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour que la conique (13) soit circonscrite à un triangle polaire de (1), il est nécessaire que la relation

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

existe entre les coefficients de l'équation ponctuelle de la première et de l'équation tangentielle de la seconde.

Je dis que, réciproquement, si cette relation est exacte, la conique (13) est circonscrite à une infinité de triangles polaires de (1); car, prenons un point quelconque de (13), nous pouvons déterminer $\alpha, \alpha', \alpha''$ de façon que x_1, y_1, z_1 soient les coordonnées de ce point; la polaire de ce point par rapport à la conique (1) coupe (13) en deux points; nous déterminerons β, β', β'' de façon que x_2, y_2, z_2 coïncide avec l'un de ces points; alors les neuf cosinus directeurs seront parfaitement déterminés et l'on aura

$$\varphi(x_1, x_1, z_1) = 0, \quad \varphi(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0;$$

donc $\varphi_3 = 0$, et le troisième point est aussi sur la conique $\varphi = 0$: c'est le second point où la polaire du premier, relative à (1), rencontre la conique (13). Donc

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la conique (13) soit circonscrite à une infinité de triangles

polaires de (1); il y a un pareil triangle pour chaque point de la conique (13).

Remarque. — Le point (x_2, y_2, z_2) étant déjà sur la polaire du point (x_1, y_1, z_1), quels que soient β, β', β'', il n'y aura qu'une relation à établir entre β, β', β'' pour que le point (x_2, y_2, z_2) soit aussi sur la conique $\varphi = 0$.

5. Enfin, si l'on se place au point de vue des coordonnées tangentielles,

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la conique (1) soit inscrite dans une infinité de triangles polaires de (13). On obtiendrait ce résultat en se servant des formules analogues relatives aux coordonnées tangentielles.

Système de diamètres conjugués dans les surfaces du second degré.

6. Nous regarderons (1) comme étant l'équation du cône des directions asymptotiques d'une surface du second degré à centre unique, et x, y, z comme étant proportionnels aux cosinus directeurs d'une droite passant à l'origine (c'est ce que nous nommerons des *coefficients directeurs*). Alors $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ seront les expressions générales des coefficients directeurs de trois directions conjuguées de la surface.

L'équation de la surface rapportée à son centre pourra se ramener à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + \ldots + 2B''xy = 1 \quad \text{ou} \quad P^2 + P'^2 + P''^2 = 1,$$

en prenant pour origine le centre de la surface.

La relation

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que le cône (13) soit circonscrit à une infinité de trièdres polaires du cône (1), et aussi pour que le cône (1) soit inscrit dans une infinité de trièdres polaires de (13).

Applications. — Nous allons donner diverses applications de nos formules. Calculons d'abord les coordonnées $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ des extrémités de trois diamètres conjugués quelconques. On a

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1} = \lambda;$$

en exprimant que l'équation de la surface est satisfaite pour $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, on a

$$\lambda^2(P_1^2 + P_1'^2 + P_1''^2) = 1,$$

ou, d'après (12),

$$\lambda^2 \Delta^2 = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\Delta}.$$

On a donc

$$(14)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{x_1}{\Delta}, & Y_1 = \dfrac{y_1}{\Delta}, & Z_1 = \dfrac{z_1}{\Delta}, \\ X_2 = \dfrac{x_2}{\Delta}, & Y_2 = \dfrac{y_2}{\Delta}, & Z_2 = \dfrac{z_2}{\Delta}, \\ X_3 = \dfrac{x_3}{\Delta}, & Y_3 = \dfrac{y_3}{\Delta}, & Z_3 = \dfrac{z_3}{\Delta}. \end{cases}$$

Cela posé, appelons d_1, d_2, d_3 les longueurs des trois demi-diamètres conjugués, nous aurons

$$(15)\qquad \begin{cases} d_1^2 = \dfrac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{\Delta^2}, \\ d_2^2 = \dfrac{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}{\Delta^2}, \\ d_3^2 = \dfrac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}{\Delta^2}. \end{cases}$$

1° *La somme des carrés des longueurs de trois diamètres conjugués est constante.*

Car, en ajoutant les trois égalités (15), on a

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{A}''}{\Delta^2}. \tag{16}$$

2° *La somme des projections de trois diamètres conjugués sur un axe quelconque est constante.*

Car on peut regarder l'axe des x comme une droite quelconque passant par le centre, et, d'après (14), on a

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\Delta^2} = \frac{\mathcal{A}}{\Delta^2}.$$

3° *Le volume du tétraèdre ayant pour arêtes trois demi-diamètres conjugués est constant.*

En effet on a

$$6V = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

et nous avons vu que le déterminant $(x_1 y_2 z_3)$ est égal à Δ^2; donc

$$6V = \frac{1}{\Delta}. \tag{18}$$

7. En cherchant les coordonnées du pôle du plan des extrémités de trois diamètres conjugués, on arrive à une quatrième propriété.

En effet, le plan des trois extrémités a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \Delta \\ x_2 & y_2 & z_2 & \Delta \\ x_3 & y_3 & z_3 & \Delta \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Le pôle est à l'intersection des trois plans tangents

$$P_1 P + P'_1 P' + P''_1 P'' = \Delta,$$
$$P_2 P + P'_2 P' + P''_2 P'' = \Delta,$$
$$P_3 P + P'_3 P' + P''_3 P'' = \Delta.$$

Remplaçons dans ces équations P_1, P_2, ... par leurs valeurs tirées des égalités (11), nous aurons

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' = 1, \\ \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' = 1, \\ \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' = 1; \end{cases}$$

d'où

$$P = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$P' = \alpha' + \beta' + \gamma',$$
$$P'' = \alpha'' + \beta'' + \gamma''.$$

Il n'y a donc plus qu'à résoudre les équations

$$aX + bY + cZ = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$a'X + b'Y + c'Z = \alpha' + \beta' + \gamma',$$
$$a''X + b''Y + c''Z = \alpha'' + \beta'' + \gamma'',$$

pour avoir les coordonnées X, Y, Z du pôle du plan (19). On a ainsi

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\Delta},$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{\Delta},$$

$$Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{\Delta}.$$

Cela posé, l'équation de la droite qui joint l'origine au pôle est

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \lambda.$$

En exprimant que le point (x, y, z) est dans le plan (19), on a

$$\lambda = \frac{1}{3\Delta};$$

donc les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3\Delta},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3\Delta},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + {}_3}{3\Delta}.$$

Donc : *la droite qui joint le centre d'une surface du second degré à centre unique au pôle du plan qui passe par les extrémités de trois diamètres conjugués est coupée au tiers de sa longueur par ce plan, et ce point est le centre de gravité du triangle des trois extrémités.*

Pour avoir le lieu de ces pôles, il suffit d'élever au carré les équations (20) et de les ajouter; on a ainsi

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = 3.$$

C'est une surface homothétique et concentrique à la première, le rapport d'homothétie étant $\sqrt{3}$.

8. Formons la somme des carrés des aires des trois faces du tétraèdre; en appelant A_1, A_2, A_3 ces aires, nous avons

$$4A_1^2 = d_2^2\, d_3^2 \sin^2(2,3);$$

or

$$\sin^2(2,3) = 1 - \frac{(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)},$$

et, si l'on se rappelle les valeurs de d_1, d_2, d_3, on voit que

$$4A_1^2 = \frac{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}{\Delta^4}$$

ou bien

$$4A_1^2 = \frac{(y_2z_3 - z_2y_3)^2 + (z_2x_3 - x_2z_3)^2 + (x_2y_3 - y_2x_3)^2}{\Delta^4}.$$

Or

$$y_2 z_3 - z_2 y_3 = \Delta(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha''),$$
$$z_2 x_3 - x_2 z_3 = \Delta(b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha''),$$
$$x_2 y_3 - y_2 x_3 = \Delta(c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'');$$

donc

$$4A_1^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta^4}[(a^2+b^2+c^2)\alpha^2 + (a'^2+b'^2+c'^2)\alpha'^2 + \ldots],$$

et, en formant de même $4A_2^2$ et $4A_3^2$, puis ajoutant, on a

$$4(A_1^2+A_2^2+A_3^2) = \frac{a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2+a''^2+b''^2+c''^2}{\Delta^2},$$

c'est-à-dire

$$4(A_1^2+A_2^2+A_3^2) = \frac{A+A'+A''}{\Delta^2}.$$

9. Cela posé, si l'on appelle ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois demi-axes, on a

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2 = \frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{A}''}{D}, \quad D=\Delta^2,$$
$$\rho_2^2\rho_3^2+\rho_3^2\rho_1^2+\rho_1^2\rho_2^2 = \frac{A+A'+A''}{D},$$
$$\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2 = \frac{1}{D},$$

où D désigne le discriminant du cône des directions asymptotiques, et où

$$\mathcal{A} = A'A''-B^2, \quad \mathcal{A}' = A''A-B'^2, \quad \mathcal{A}'' = AA'-B''^2.$$

L'équation qui donne les carrés des trois demi-axes est donc

$$D\rho^6 - (A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)\rho^4 + (A+A'+A'')\rho^2 - 1 = 0.$$

L'équation en $\frac{1}{\rho^2}$ est bien connue sous le nom d'équation en S.

10. N'oublions pas que $\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{A}''$ est la somme des carrés des neuf déterminants mineurs de Δ et que $A+A'+A''$ est la somme des carrés des neuf coefficients $a, b, c, a', b', c'; a'', b'', c''$.

Il résulte de là que les deux ellipsoïdes

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2=1,$$
$$(ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2=1$$

sont égaux (Jacobi); car l'équation en ρ^2 est la même pour ces deux surfaces.

11. Il serait facile d'obtenir les coefficients directeurs des diamètres conjugués de cette seconde surface. Dans l'expression de x, on ferait des permutations circulaires sur les lettres a, b, c et non sur leurs accents; on aurait ainsi

$$x_1=(b'c'')\alpha+(c'a'')\beta+(a'b'')\gamma,$$
$$y_1=(b''c)\alpha+(c''a)\beta+(a''b)\gamma,$$
$$z_1=(bc')\alpha+(ca')\beta+(ab')\gamma,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourrait faire de nombreuses applications de ce qui précède; nous n'en donnerons plus que deux pour montrer comment ces formules s'appliquent à la résolution de certains problèmes.

Premier problème. — *On considère deux surfaces du second degré à centre. Par le centre de l'une d'elles, on mène trois droites parallèles à trois diamètres conjugués de la seconde. On demande le lieu du pôle du plan des trois extrémités.*

Soient

$$(1)\qquad ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2bz'x+2b''xy=1$$

l'équation de la première surface, et

$$(2)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

l'ensemble des termes du second degré dans l'équation de la seconde.

Appelons $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ les points où les trois parallèles aux diamètres conjugués de la seconde surface percent la première, et $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ leurs coefficients directeurs. On a

$$X_1 = \frac{x_1}{\rho_1},\quad Y_1 = \frac{y_1}{\rho_1},\quad Z_1 = \frac{z_1}{\rho_1},$$
$$\rho_1^2 = ax_1^2 + a'y_1^2 + \ldots + 2b''x_1y_1$$

et des formules analogues pour les coordonnées des deux autres extrémités.

Le pôle du plan qui passe par les trois points ainsi déterminés est à l'intersection des trois plans tangents en ces points

$$x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\rho_1,$$
$$x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\rho_2,$$
$$x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_3\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\rho_3,$$

ou, en remplaçant $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ par leurs expressions et posant

$$2X = (b'c'')\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (c'a'')\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a'b'')\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$2Y = (b''c)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (c''a)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a''b)\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$2Z = (bc')\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (ca')\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (ab')\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

on a

$$\alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z = \rho_1,$$
$$\beta X + \beta' Y + \beta'' Z = \rho_2,$$
$$\gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z = \rho_3.$$

Élevant ces trois égalités au carré et ajoutant, on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + 2b\mathcal{B} + 2b'\mathcal{B}' + 2b''\mathcal{B}''.$$

Le lieu est donc une surface du second degré, concentrique à la surface donnée, et ayant pour plans diamétraux les trois plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

DEUXIÈME PROBLÈME. — *On donne les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde de révolution; trouver le lieu décrit par le centre de cet ellipsoïde.*

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques, que nous fixerons dans la suite; et soient $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ les coordonnées des trois points donnés A_1, A_2, A_3, comme extrémités des trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Appelons x, y, z les coordonnées du centre. L'équation de cet ellipsoïde sera de la forme

$$(1)\quad A(X-x)^2 + A'(Y-y)^2 + \ldots + 2B''(X-x)(Y-y) = 1.$$

Cela posé, appelons $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ les coefficients directeurs des trois diamètres conjugués déterminés comme nous l'avons dit; nous aurons

$$\lambda x_1 = X_1 - x,\quad \lambda y_1 = Y_1 - y,\quad \lambda z_1 = Z_1 - z.$$

Or, si l'on met x_1, y_1, z_1 à la place de $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ dans le premier membre de (1), il se réduit à Δ^2; on a donc

$$\lambda^2 \Delta^2 = 1,\quad \text{ou}\quad \lambda = \frac{1}{\Delta},$$

donc

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \Delta(X_1 - x), & y_1 = \Delta(Y_1 - y), & z_1 = \Delta(Z_1 - z), \\ x_2 = \Delta(X_2 - x), & y_2 = \Delta(Y_2 - y), & z_2 = \Delta(Z_2 - z), \\ x_3 = \Delta(X_3 - x), & y_3 = \Delta(Y_3 - y), & z_3 = \Delta(Z_3 - z). \end{cases}$$

(Le signe qu'on doit prendre pour Δ dans chaque sys-

tème de trois formules n'est pas déterminé; mais nous n'aurons pas besoin de le faire.)

Telles sont les expressions des coefficients directeurs de nos trois diamètres conjugués.

En tenant compte des relations (9), on a

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Delta^2[(X_1-x)^2+(X_2-x)^2+(X_3-x)^2]=A'A''-B^2,\\
&\Delta^2[(Y_1-y)^2+(Y_2-y)^2+(Y_3-y)^2]=A''A-B'^2,\\
&\Delta^2[(Z_1-z)^2+(Z_2-z)^2+(Z_3-z)^2]=AA'-B''^2,\\
&\Delta^2[(Y_1-y)(Z_1-z)+(Y_2-y)(Z_2-z)\\
&\qquad\qquad+(Y_3-y)(Z_3-z)]=B'B''-AB,\\
&\Delta^2[(Z_1-z)(X_1-x)+\ldots]=B''B-A'B',\\
&\Delta^2[(X_1-x)(Y_1-y)+\ldots]=BB'-A''B''.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations étant homogènes en A, A′, A″, B, B′, B″, Δ^2, on peut faire $\Delta^2=1$. Nos relations peuvent alors s'écrire

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Sigma X_1^2-2x\Sigma X_1+3x^2=A'A''-B^2,\\
&\Sigma Y_1^2-2y\Sigma Y_1+3y^2=A''A-B'^2,\\
&\Sigma Z_1^2-2z\Sigma Z_1+3z^2=AA'-B''^2,\\
&\Sigma Y_1Z_1-z\Sigma Y_1-y\Sigma Z_1+3yz=B'B''-AB,\\
&\Sigma Z_1X_1-x\Sigma Z_1-z\Sigma X_1+3zx=B''B-A'B',\\
&\Sigma X_1Y_1-x\Sigma Y_1-y\Sigma X_1+3xy=BB'-A''B''.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (3) montrent qu'il faut prendre pour axes de coordonnées trois droites rectangulaires passant au centre de gravité des trois points A_1, A_2, A_3, telles que les axes Ox et Oy soient, dans le plan des trois points, les axes principaux d'inertie de ces trois points considérés comme ayant même masse. On a alors

$$\Sigma X_1=\Sigma Y_1=\Sigma Z_1=0,$$
$$\Sigma Y_1Z_1=\Sigma Z_1X_1=\Sigma X_1Y_1=0,$$
$$\Sigma Z_1^2=0.$$

Désignant en outre les deux moments principaux

d'inertie par $3k^2$ et $3l^2$, nous aurons, en divisant chacun des coefficients du cône des directions asymptotiques par 3,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+k^2 &= A'A''-B^2,\\ y^2+l^2 &= A''A-B'^2,\\ z^2 &= AA'-B''^2,\\ yz &= B'B''-AB,\\ zx &= B''B-A'B',\\ xy &= BB'-A''B''. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que la surface du second degré soit un carré parfait, c'est qu'on puisse trouver une valeur de S pour laquelle les six équations qui suivent aient lieu simultanément

$$\begin{aligned} &B'B''-(A-S)B=0, && (A''-S)(A'-S)-B^2=0,\\ &B''B-(A-S)B'=0, && (A-S)(A''-S)-B'^2=0,\\ &BB'-(A''-S)B''=0, && (A'-S)(A-S)-B''^2=0. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces relations, les relations (4) deviennent

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+k^2 &= S(A'+A'')-S^2,\\ y^2+l^2 &= S(A''+A)-S^2,\\ z^2 &= S(A+A')-S^2,\\ yz &= -SB,\\ zx &= -SB',\\ xy &= -SB''. \end{aligned}\right.$$

On peut multiplier tous les coefficients de l'équation du cône asymptotique par un même nombre S et l'on a (car S n'est pas nul)

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+k^2 &= A'+A''-S^2,\\ y^2+l^2 &= A''+A-S^2,\\ z^2 &= A+A'-S^2,\\ yz &= -B,\qquad zx=-B',\qquad xy=-B''. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les conditions de révolution, on examine deux cas : d'abord celui où aucun des coefficients B n'est nul; dans ce cas, les conditions de révolution sont

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''};$$

ensuite le cas où l'un des coefficients B est nul, $B = 0$ par exemple : il faut alors qu'un autre des coefficients B soit nul, $B' = 0$ par exemple, et qu'on ait en outre

$$(A - A'')(A' - A'') - B''^2 = 0.$$

Dans le premier cas, on a

$$A + x^2 = A' + y^2 = A'' + z^2.$$

En tenant compte des premières relations, on aurait

$$k = l = 0,$$

ce qui n'est pas.

Il faut donc se placer dans le second cas; alors z est nul et $B'' = -xy$; des trois premières relations (6), on tire par soustraction

$$x^2 - z^2 + k^2 = A'' - A',$$
$$y^2 - z^2 + l^2 = A'' - A'.$$

On a donc

$$(A'' - A)(A'' - A') - B''^2$$
$$= (x^2 - z^2 + k^2)(y^2 - z^2 + l^2) - x^2y^2 = 0,$$

et, comme $z = 0$, on a pour le lieu des centres la conique imaginaire

$$z = 0, \quad l^2x^2 + k^2y^2 + l^2k^2 = 0.$$

Si l'on suppose $B = 0$, $B'' = 0$, on a en second lieu la conique

$$y = 0, \quad l^2x^2 + (l^2 - k^2)z^2 - l^2(l^2 - k^2) = 0;$$

et enfin, pour $B' = 0$, $B'' = 0$, on a la conique

$$x = 0,\quad k^2y^2 + (k^2 - l^2)z^2 - k^2(k^2 - l^2) = 0.$$

Ainsi le lieu des centres se compose de ces trois coniques. Si nous supposons $l > K$, la première est une ellipse imaginaire ayant pour axes Ox, Oy; la seconde une ellipse réelle ayant pour axes Ox, Oz; la troisième une hyperbole ayant pour axes Oy, Oz. Ce sont les trois focales de l'ellipsoïde infiniment aplati

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{0} + 1 = 0.$$

Tétraèdres polaires des surfaces du second degré.

12. Nous allons donner rapidement des expressions analogues pour les coordonnées homogènes des quatre sommets d'un tétraèdre polaire quelconque d'une surface du second degré

(1) $$P^2 + P'^2 + P''^2 P'''_2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
P &\equiv a\ x + b\ y + c\ z + dt,\\
P' &\equiv a'\ x + b'y + c'\ z + d't,\\
P'' &\equiv a''\ x + b''y + c''z + d''t,\\
P''' &\equiv a'''x + b'''y + c'''z + d'''t.
\end{aligned}$$

Nous désignerons par Δ le déterminant de ces quatre fonctions linéaires, par A, B, C, D, ... ses déterminants mineurs du premier ordre.

Cherchons l'expression de la forme adjointe de (1). C'est ce que devient le premier membre de (1) multiplié par Δ^2, lorsqu'on y fait la substitution linéaire suivante

$$\begin{aligned}
aP + a'P' + a''P'' + a'''P''' &= u,\\
bP + b'P' + b''P'' + b'''P''' &= v,\\
cP + c'P' + c''P'' + c'''P''' &= w,\\
dP + d'P' + d''P'' + d'''P''' &= p.
\end{aligned}$$

De ces équations, on tire

$$\begin{aligned}
\Delta P &= A u + B v + C w + D p,\\
\Delta P' &= A' u + B' v + C' w + D' p,\\
\Delta P'' &= A'' u + B'' v + C'' w + D'' p,\\
\Delta P''' &= A''' u + B''' v + C''' w + D''' p.
\end{aligned}$$

Or la forme adjointe est

$$\Delta^2(P^2 + P'^2 + P''^2 + P'''^2);$$

c'est donc

$$\Sigma A^2 u^2 + \Sigma B^2 v^2 + \ldots + 2\Sigma CD wp.$$

Nous désignerons les coefficients de l'équation tangentielle de la surface donnée par

$$\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \mathcal{A}_{33}, \mathcal{A}_{44}, \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{14}, \mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{24}, \mathcal{A}_{34}.$$

Cela fait, introduisons les seize quantités

$$\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma, \delta, & \alpha', \beta', \gamma', \delta', \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', & \alpha''', \beta''', \gamma''', \delta''' \end{matrix}$$

satisfaisant aux dix relations suivantes

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \alpha'''^2 = 1,\\
&\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \beta'''^2 = 1,\\
&\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma'''^2 = 1,\\
&\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \delta'''^2 = 1,\\
&\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\gamma\delta + \gamma'\delta' + \gamma''\delta'' + \ldots = 0,
\end{aligned}\right.$$

et prenons le système pour lequel le déterminant de ces seize quantités est égal à $+1$; alors chacun des déterminants mineurs de ce déterminant est égal à l'élément correspondant.

D'ailleurs on a identiquement

$$P^2 + P'^2 + P''^2 + P'''^2 = Q^2 + Q'^2 + Q''^2 + Q'''^2,$$

où

$$Q = \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' + \alpha''' P''',$$
$$Q' = \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''',$$
$$Q'' = \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' + \gamma''' P''',$$
$$Q''' = \delta P + \delta' P' + \delta'' P'' + \delta''' P'''.$$

Les plans $Q = 0$, $Q' = 0$, $Q'' = 0$, $Q''' = 0$ sont les quatre faces d'un tétraèdre polaire quelconque de la surface. En prenant les points de rencontre de ces plans trois à trois, on a les quatre sommets. Laissons de côté la première équation et prenons les trois équations suivantes

$$\beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''' = 0,$$
$$\gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' + \gamma''' P''' = 0,$$
$$\delta P + \delta' P' + \delta''' P'' + \delta''' P''' = 0.$$

Elles donnent

$$\frac{P}{\alpha} = \frac{P'}{\alpha'} = \frac{P''}{\alpha''} = \frac{P'''}{\alpha'''}.$$

Nous prendrons

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1 = \alpha,$$
$$a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d't_1 = \alpha',$$
$$a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + d''t_1 = \alpha'',$$
$$a'''x_1 + b'''y_1 + c'''z_1 + d'''t_1 = \alpha''',$$

x_1, y_1, z_1, t_1 étant les quatre coordonnées homogènes du premier sommet. Ces équations, résolues par rapport à x_1, y_1, z_1, t_1, donnent un des systèmes de valeurs des quatre coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 :

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = A\alpha + A'\alpha' + A''\alpha'' + A'''\alpha''', \\ y_1 = B\alpha + B'\alpha' + B''\alpha'' + B'''\alpha''', \\ z_1 = C\alpha + C'\alpha' + C''\alpha'' + C'''\alpha''', \\ t_1 = D\alpha + D'\alpha' + D''\alpha'' + D'''\alpha'''. \end{cases}$$

On aurait de même les coordonnées des trois autres sommets en mettant successivement β, γ, δ à la place de α.

On en déduit immédiatement, en tenant compte des relations (2), les dix relations suivantes

$$(4)\quad\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\mathcal{A}_{11},\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=\mathcal{A}_{22},\\ z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=\mathcal{A}_{33},\\ t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2=\mathcal{A}_{44},\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=\mathcal{A}_{12},\\ x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3+x_4z_4=\mathcal{A}_{13},\\ x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3+x_4t_4=\mathcal{A}_{14},\\ y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3+y_4z_4=\mathcal{A}_{23},\\ y_1t_1+y_2t_2+y_3t_3+y_4t_4=\mathcal{A}_{24},\\ z_1t_1+z_2t_2+z_3t_3+z_4t_4=\mathcal{A}_{34}. \end{cases}$$

On en déduit aussi les formules suivantes

$$(5)\quad\begin{cases} \Delta\alpha=P_1, & \Delta\alpha'=P'_1, & \Delta\alpha''=P''_1, & \Delta\alpha'''=P'''_1,\\ \Delta\beta=P_2, & \Delta\beta'=P'_2, & \Delta\beta''=P''_2, & \Delta\beta'''=P'''_2,\\ \Delta\gamma=P_3, & \Delta\gamma'=P'_3, & \Delta\gamma''=P''_3, & \Delta\gamma'''=P'''_3,\\ \Delta\delta=P_4, & \Delta\delta'=P'_4, & \Delta\delta''=P''_4, & \Delta\delta'''=P'''_4. \end{cases}$$

On déduit aisément de ces formules que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+\ldots+2A_{34}zt=0$$

soit circonscrite à une infinité de tétraèdres polaires de la surface

$$\mathcal{A}_{11}u^2+\mathcal{A}_{22}v^2+\ldots+2\mathcal{A}_{34}wp=0$$

est

$$A_{11}\mathcal{A}_{11}+A_{22}\mathcal{A}_{22}+\ldots+2A_{34}\mathcal{A}_{34}=0.$$

C'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que la seconde surface soit inscrite dans une infinité de tétraèdres polaires de la première.

ADDITION A UNE NOTE SUR UN MODE DE DÉTERMINATION DES COURBES PLANES (1);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Soit la courbe

$$y = F(x).$$

En chaque point de cette courbe, portons sur la tangente, dans un sens déterminé, la longueur

$$l = \varphi(s),$$

s étant l'arc compté sur la courbe entre le point considéré et une origine fixe.

L'extrémité de la tangente décrit une courbe dont la normale coupe la normale à la première à une distance δ du centre de courbure de celle-ci. On a démontré, dans la Note citée, que

$$\delta = \rho\,\varphi'(s),$$

ρ étant le rayon de courbure de la courbe donnée.

Supposons maintenant la longueur l donnée en fonction de l'abscisse

$$l = \psi(x),$$

s et x étant liés par la relation

$$s = f(x).$$

On a

$$\varphi(s) = \psi(x).$$

(1) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. I, p. 40.

Dérivons par rapport à x

$$\varphi'(s)f'(x) = \psi'(x).$$

D'ailleurs, de la relation

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

on tire

$$f'(x) = \sqrt{1 + F'(x)^2}.$$

Par suite,

$$\varphi'(s) = \frac{\psi'(x)}{\sqrt{1 + F'(x)^2}}$$

et

$$\delta = \frac{\rho\psi'(x)}{\sqrt{1 + F'(x)^2}}.$$

Si α est l'angle de la tangente considérée avec l'axe des x, on a

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + F'(x)^2}}.$$

L'expression précédente peut donc s'écrire

$$\delta = \psi'(x)\rho\cos\alpha;$$

$\rho\cos\alpha$ est la projection du rayon de courbure sur l'axe des y.

En particulier, si l'on porte sur chaque tangente une longueur égale à l'abscisse du point de contact, on a

$$\delta = \rho\cos\alpha.$$

On peut aussi modifier l'expression de δ à l'aide de la relation

$$\rho = \frac{[1 + F'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{F''(x)}.$$

Cela donne

$$\delta = \frac{\psi'(x)[1 + F'(x)^2]}{F''(x)}.$$

On peut se proposer de déterminer la fonction ψ de

façon que la longueur δ soit égale à une constante k. On a, dans ce cas,

$$\psi'(x) = \frac{k\,F''(x)}{1+F'(x)^2},$$

d'où, en intégrant,

$$l = \psi(x) = k \operatorname{arc\,tang} F'(x) + C,$$

ou, si α est l'angle de la tangente avec l'axe des x,

$$l = k\alpha + C;$$

d'où ce théorème :

Si, sur les tangentes à une courbe plane, on porte des longueurs proportionnelles aux angles que font ces tangentes avec une même droite du plan, la normale à la courbe ainsi obtenue coupe la normale à la première courbe à une distance constante du centre de courbure de celle-ci.

Remarquons que le centre de courbure E à la courbe en question (P) s'obtient très facilement si l'on connaît le centre de courbure C_1 de la développée de la courbe (M) donnée.

En effet, la normale PD coupant, d'après ce qui vient d'être démontré, la normale MC à une distance constante du centre de courbure C, la normale à la courbe décrite par le point D passe par le centre de courbure C_1 de la développée.

Cela posé, on a, entre les déplacements infiniment petits correspondants des points M, P, D, les relations

$$\frac{d(M)}{d(P)} = \frac{MC}{PD}, \quad \frac{d(P)}{d(D)} = \frac{PE}{D\delta}, \quad \frac{d(D)}{d(M)} = \frac{DC_1}{MC},$$

$E\delta$ étant la normale à l'enveloppe de PD.

D'où, en faisant le produit,

$$\frac{PE \times DC_1}{PD \times D\delta} = 1$$

ou

$$\frac{PE}{D\delta} = \frac{PD}{DC_1}.$$

Ce qui conduit à la construction suivante :

Porter DP′ = PD; *par le milieu* μ *de* PD, *tirer* μα *parallèle à* C_1P'; *abaisser la perpendiculaire* αβ *sur* PD; *porter* αγ = βα; μγ *coupe* C_1D *en* δ; *le pied* E *de la perpendiculaire abaissée de* δ *sur* PD *est le centre de courbure cherché.*

En effet, tirons δδ′ et γγ′ parallèles à μα; puisque αγ = βα, on a μβ = γ′μ; par suite, δ′μ = μE, et, comme μ est le milieu de PD, Dδ′ = PE; d'ailleurs, μα étant parallèle à C_1P',

$$\frac{D\delta'}{D\delta} = \frac{P'D}{DC_1}.$$

Donc

$$\frac{PE}{D\delta} = \frac{PD}{DC_1}.$$

Par suite, le point E ainsi obtenu répond bien à la question.

QUESTION.

1437. u_n désignant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Lamé, on a

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0,$$

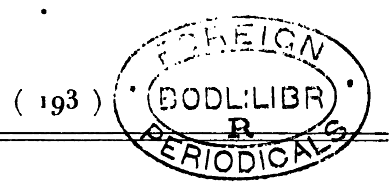
pourvu que l'on remplace les exposants par des indices.

(E. Cesàro).

ERRATA.

Page 52, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $\frac{du}{dX}$, *lisez* $\frac{dx}{dX}$.

Page 58, ligne 2 en remontant, *au lieu de* dy, dz, *lisez* δy, δz.



RELATIONS ENTRE LES DISTANCES D'UN FOYER D'UNE CONIQUE A QUATRE POINTS OU A QUATRE TANGENTES;

Par M. X. ANTOMARI,
Professeur au lycée de Carcassonne.

INTRODUCTION.

1. Les propriétés focales dont il va être question sont relatives aux distances d'un foyer à quatre points ou à quatre tangentes.

Trois points et un foyer déterminent une courbe du second degré; par conséquent, étant donnés un foyer et quatre points, il doit exister une relation entre les éléments qui déterminent ces cinq points.

De même un foyer et trois tangentes déterminent une courbe du second degré. Il y aura donc une relation entre les éléments qui déterminent un foyer et quatre tangentes.

Ces relations n'ont pas été remarquées jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Elles sont susceptibles d'applications intéressantes et permettent en particulier de déterminer simplement les foyers dans les sections coniques.

Nous avons divisé notre travail en deux Parties :

Dans la première Partie, nous nous occupons de la relation entre un foyer et quatre points; comme nous le verrons, cette relation a lieu entre les distances du foyer aux quatre points. Nous l'appliquons à la recherche des foyers dans les trois courbes, et nous terminons par une propriété de quatre coniques circonscrites à un quadrilatère.

Dans la deuxième Partie, nous nous occupons de la relation entre un foyer et quatre tangentes : c'est une relation entre les distances du foyer aux quatre tangentes. Nous l'appliquons aussi à la recherche des foyers et nous terminons par une propriété de quatre coniques inscrites dans un quadrilatère.

PREMIÈRE PARTIE.

RELATION ENTRE LES DISTANCES D'UN FOYER A QUATRE POINTS.

2. Soient α et β les coordonnées d'un foyer,

$$mx + ny + h = 0$$

l'équation de la directrice correspondante. L'équation de la courbe peut alors se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx + ny + h)^2.$$

Désignons par D la distance d'un point (x, y) de la courbe au foyer, on aura

$$D = \pm(mx + ny + h).$$

Considérons quatre points appartenant à une même branche, et appelons (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées de ces quatre points, D, D_1, D_2, D_3 les distances au foyer.

Pour ces quatre distances, il faudra prendre le même signe devant les parenthèses : supposons que ce soit le signe +. On aura

$$\begin{aligned} D &= mx + ny + h, \\ D_1 &= mx_1 + ny_1 + h, \\ D_2 &= mx_2 + ny_2 + h, \\ D_3 &= mx_3 + ny_3 + h. \end{aligned}$$

L'élimination de m, n et h entre ces quatre équations

donne la relation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} D & x & y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est homogène en D, D_1, D_2, D_3. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Étant donnés quatre points d'une conique appartenant à une même branche, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances de ces quatre points à un foyer.*

Remarque. — La relation serait encore linéaire et homogène si les quatre points n'appartenaient pas à la même branche. Le théorème précédent peut donc être énoncé d'une manière générale :

Il y a une relation linéaire et homogène entre les distances de quatre points quelconques d'une conique à un foyer.

Remarque II. — L'équation (1) développée peut s'écrire

$$(2)\qquad AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0,$$

en posant

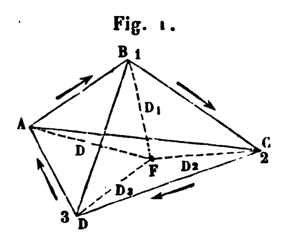
$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soient A, B, C, D les quatre points et F le foyer. Si l'on construit le quadrilatère ABCD, on voit facilement

que, si l'on adopte pour sens positif le sens indiqué par

Fig. 1.



les flèches, on a (*fig.* 1)

$$A = 2 \text{ surf. } BCD,$$
$$A_1 = 2 \text{ surf. } ACD,$$
................,

de sorte que les quatre quantités A, A_1, A_2, A_3 sont liées par la relation

$$A + A_2 = A_1 + A_3 = 2 \text{ surf. } ABCD.$$

Nous pouvons maintenant compléter l'énoncé du théorème I, et nous voyons que :

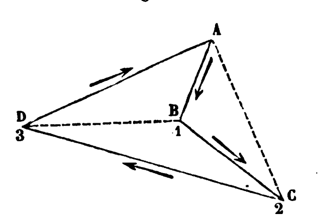
Si les sommets d'un quadrilatère convexe inscrit dans une conique appartiennent à une même branche de courbe, et si l'on multiplie la distance de chaque sommet au foyer par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la somme des produits, correspondant à deux sommets opposés, est égale à la somme des deux autres produits.

3. Supposons maintenant que trois sommets seulement appartiennent à une même branche de courbe. Alors l'un des sommets sera à l'intérieur du triangle formé par les trois autres (*fig.* 2).

Si les trois points A, B, C appartiennent à la même branche, le point B, par exemple, sera à l'intérieur du triangle ACD.

Adoptons pour sens positif le sens indiqué par les

Fig. 2.



flèches. Le triangle ABC étant parcouru en sens contraire, la quantité

$$A_3 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

représentera le double de l'aire du triangle ABC changée de signe. D'autre part, le point D appartenant à la deuxième branche, la distance D_3 devra être prise avec le signe —; de sorte que l'on aura encore

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0,$$

A, A_1, A_2, A_3 ayant la même signification que précédemment, et l'énoncé du théorème (I) subsiste ici sans modifications.

4. Examinons enfin l'hypothèse de deux points sur chaque branche. Le quadrilatère ayant pour sommets ces quatre points sera forcément convexe.

Soient A et B les deux points appartenant à la première branche, C et D les deux autres. Les distances D_2 et D_3 devront être prises avec le signe —, et la relation devient

$$AD - A_1 D_1 - A_2 D_2 + A_3 D_3 = 0$$

ou

$$(2) \qquad AD - A_2 D_2 = A_1 D_1 - A_3 D_3,$$

A, A_1, A_2, A_3 désignant respectivement le double de l'aire du triangle opposé.

Ainsi :

Théorème II. — *Étant donné un quadrilatère inscrit dans une hyperbole, et tel qu'il y ait deux sommets sur chaque branche, si l'on multiplie la distance de chaque sommet au foyer par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la différence des produits correspondant à deux sommets opposés est égale à la différence des deux autres produits.*

Théorème III. — *Étant donnés un point fixe* F, *trois points fixes* B, C, D *et un point variable* A, *si, en multipliant la distance au point* F *de chaque sommet du quadrilatère* ABCD *par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la somme ou la différence des produits correspondant à deux sommets opposés est égale à la somme ou à la différence des deux autres, le point mobile décrit une conique ayant pour foyer le point* F.

Supposons qu'il s'agisse de la somme des produits. Soient (x, y) les coordonnées du point mobile, (x_1, y_1),... les coordonnées des points fixes, D, D_1, D_2, D_3 les distances respectives au point F. On devra avoir

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0,$$

A désignant l'aire du triangle BCD (*fig.* 1), A_1 celle du triangle ACD, ...

L'équation précédente peut évidemment s'écrire

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} D & x & y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, il est manifeste qu'elle représente une conique ayant pour foyer F.

La démonstration serait la même dans le cas de la différence.

THÉORÈME IV (Réciproque des théorèmes I et II). — *Si un point* F, *pris dans le plan d'un quadrilatère* ABCD (*fig.* 1), *est tel que l'on ait*

$$(4)\qquad (BCD)D-(ACD)D_1+(ABD)D_2-(ABC)D_3=0$$

ou

$$(5)\qquad (BCD)D-(ACD)D_1-(ABD)D_2+(ABC)D_3=0,$$

les quatre points A, B, C, D *sont sur une même conique ayant pour foyer le point* F.

Occupons-nous, par exemple, de l'équation (4), et remarquons d'abord que la conique représentée par l'équation (3) passe par les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) : c'est donc la conique définie par le point F et par les trois points B, C, D.

Considérons actuellement cette même conique. Son équation sera, d'après cela,

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \Delta & X & Y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or on a, en vertu de l'équation (4),

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} D & x & y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que le point (x, y) est sur la courbe (6),

et par suite que les quatre points sont sur une même conique ayant pour foyer le point F.

7. Il résulte de ce qui précède que, si l'on prend la différence des produits, la courbe du théorème III sera toujours une hyperbole, tandis que, si l'on prend la somme, elle pourra être l'une quelconque des trois courbes du second degré.

Reprenons donc l'équation (3) et voyons le genre de courbe qu'elle pourra représenter.

L'équation de la directrice est

$$(8)\quad x\begin{vmatrix} D_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} D_1 & x_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1 & x_1 & y_1 \\ D_2 & x_2 & y_2 \\ D_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour abréger, nous désignerons par m le coefficient de x et par $-n$ le coefficient de y, de telle sorte que nous aurons

$$m = D_1(y_2 - y_3) - D_2(y_1 - y_3) + D_3(y_1 - y_2),$$
$$n = -D_1(x_2 - x_3) + D_2(x_1 - x_3) - D_3(x_1 - x_2)$$

et, par suite,

$$m^2 + n^2 = \left\{ \begin{array}{l} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] D_1^2 \\ \quad + [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] D_2^2 \\ \quad + [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] D_3^2 \\ \quad - 2 D_1 D_2 [(y_2 - y_3)(y_1 - y_3) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_3)] \\ \quad - 2 D_1 D_3 [(y_1 - y_2)(y_3 - y_2) + (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)] \\ \quad - 2 D_2 D_3 [(y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)]. \end{array} \right.$$

Soient F le foyer et BCD le triangle formé par les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (*fig.* 3).

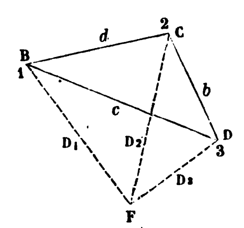
On voit sans difficulté que la relation (9) devient

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{l} m^2 + n^2 = d^2 D_3^2 + b^2 D_1^2 + c^2 D_2^2 \\ \quad - 2bc\, D_1 D_2 \cos D - 2bd D_1 D_3 \cos C - 2cd D_2 D_3 \cos B. \end{array} \right.$$

Or le triangle BCD nous donne

$$2bc\cos D = b^2 + c^2 - d^2,$$
$$2bd\cos C = b^2 + d^2 - c^2,$$
$$2cd\cos B = c^2 + d^2 - b^2.$$

Fig. 3.



Remplaçons dans l'équation (10), elle devient par une transformation simple

$$m^2 + n^2 = d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3).$$

D'autre part, le coefficient de D, dans l'équation (3), est

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2S,$$

S désignant la surface du triangle BCD.

Il en résulte que la courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que l'on aura

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) \\ & \quad + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) \lesseqgtr 4S^2. \end{aligned} \right.$$

8. Théorème V. — *Il existe une relation du second degré entre les distances au foyer des trois sommets d'un triangle inscrit dans une parabole.*

En effet, nous venons de voir que, si la courbe (3) est

une parabole, on a

$$(12)\quad \begin{cases} a^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) \\ \qquad + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) = 4S^2. \end{cases}$$

Cette relation est du second degré par rapport à D_1, D_2, D_3.

9. Théorème VI. — *Si, par les divers points d'une conique, on élève sur le plan de la courbe des perpendiculaires égales respectivement aux rayons vecteurs allant au foyer, les extrémités de ces perpendiculaires sont situées dans un même plan.*

Supposons en effet que, dans l'équation (3), D, D_1,... représentent les z des points (x_1, y_1), ... Le premier membre de cette équation exprime alors que le volume du tétraèdre, qui a pour sommets les quatre points (x, y, D), (x_1, y_1, D_1), ..., est nul, c'est-à dire que ces quatre points sont dans un même plan.

Cela résulte d'ailleurs immédiatement de l'équation

$$D = mx + ny + h;$$

car, si, dans cette équation, on remplace D par z, elle représente un plan : ce plan passe par la directrice.

Remarque I. — Plus généralement, si par les divers points d'une conique on mène des parallèles à une direction fixe, proportionnelles aux rayons vecteurs respectifs menés d'un foyer à ces points, les extrémités de ces droites seront dans le même plan.

En effet, en remplaçant D par $\frac{z}{K}$ dans la même équation, on obtient une nouvelle équation représentant encore un plan.

Remarque II. — Deux parallèles à la direction fixe devront être de même sens ou de sens contraires suivant

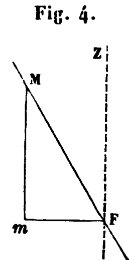
que les deux points appartiennent à la même branche ou à deux branches différentes.

A l'aide des remarques précédentes, on démontre simplement deux théorèmes bien connus; ce sont les suivants :

10. Théorème VII. — *Toute section plane d'un cône de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet suivant une conique ayant pour foyer le sommet du cône.*

Soient, en effet, F le foyer d'une conique (*fig.* 4), m un point de la courbe et $Mm = K.\, mF$ une perpendiculaire

Fig. 4.



au plan de la courbe menée par le point m. Joignons M et F. Le triangle MmF donne

$$Mm = mF \operatorname{tang} \widehat{mFM}.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang} \widehat{mFM} = K.$$

L'angle mFM étant constant, la droite MF engendre un cône de révolution lorsque le point m décrit la conique.

D'ailleurs la conique peut être considérée comme la projection sur son plan de la section faite dans ce cône par un plan sécant quelconque $z = K(mx + ny + h)$; d'où le théorème énoncé.

11. Théorème VIII. — *Toute section plane d'un cône du second ordre se projette sur un plan cyclique mené par le sommet, et lorsque les projetantes sont parallèles au diamètre conjugué au plan cyclique considéré, suivant une conique ayant pour foyer le sommet du cône.*

En effet, si la direction Mm (*fig.* 4) n'est plus perpendiculaire au plan de la conique, l'angle $\widehat{mFM}$ n'est plus constant, et MF engendre un cône quelconque du second ordre. Seulement ce cône admet le plan de la conique comme plan cyclique.

Application a la détermination des foyers dans les courbes du second ordre.

12. Nous allons appliquer les résultats qui précèdent à la détermination des foyers dans les courbes du second ordre.

Avant d'aborder cette question, il est bon de faire quelques remarques.

L'équation d'une courbe du second degré, quand elle possède un foyer (α, β), peut se mettre sous la forme

$$(13) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+a)^2=0.$$

Si, dans cette équation, on fait $x=\alpha$, $y=\beta$, le résultat de la substitution est $-(m\alpha+n\beta+h)^2$: il a donc le signe —.

Si l'on remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque de la directrice, le résultat de la substitution est $(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2$, x_1 et y_1 étant les coordonnées de ce point : ce résultat est donc positif.

Donc :

Théorème IX. — *Dans toute courbe du second degré, le foyer, s'il y en a un, et un point quelconque de la

directrice correspondante appartiennent à des régions différentes.

Il en résulte que :

1° *Dans l'ellipse et dans la parabole, les foyers sont intérieurs à la courbe et la directrice extérieure.*

Car, si un foyer était extérieur, ou si la directrice coupait la courbe, il y aurait des points de la directrice qui appartiendraient à la même région que le foyer.

2° *Dans l'hyperbole, la directrice est dans la même région que les asymptotes.*

Même démonstration que plus haut.

Passons maintenant à la détermination des foyers. Nous examinerons pour cela séparément chaque genre de courbe.

I. — Foyers de l'ellipse.

13. Nous avons vu que, si un quadrilatère ABCD (*fig.* 1) est inscrit dans une ellipse, on a la relation

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0.$$

Je rappelle que, si D est la distance du foyer au point A, la quantité A est l'aire du triangle BCD, ...

Supposons que le quadrilatère inscrit devienne un parallélogramme. On aura

$$A = A_1 = A_2 = A_3,$$

et, par suite,

$$D - D_1 + D_2 - D_3 = 0,$$

ou

$$D + D_2 = D_1 + D_3.$$

Ainsi :

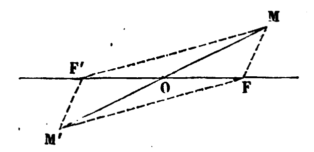
Théorème X. — *Si un parallélogramme est inscrit*

dans une ellipse, la somme des distances d'un foyer à deux sommets opposés est égale à la somme des distances du même foyer aux deux autres sommets.

Ce théorème est évident si l'on part de la définition géométrique de l'ellipse. Nous le trouvons ici directement comme conséquence du théorème I, et nous allons nous en servir d'abord pour établir la définition géométrique, et ensuite pour déterminer les foyers.

14. *Définition géométrique.* — Pour arriver à la définition géométrique de l'ellipse, remarquons que, si la courbe admet un foyer F (*fig.* 5), le point F' symétrique

Fig. 5.



du point F par rapport au centre sera aussi un foyer.

D'autre part, si un parallélogramme est inscrit dans une ellipse, les diagonales sont des diamètres de la courbe, de sorte que le théorème X peut s'énoncer :

La somme des distances d'un foyer aux deux extrémités d'un diamètre est constante.

Soient alors M et M' deux points diamétralement opposés. La figure MFM'F' est un parallélogramme; et, puisque

$$MF + M'F = K,$$

K étant une constante, il en résulte

$$MF + MF' = K.$$

Ainsi :

Théorème XI. — *Dans toute ellipse, la somme des*

distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante.

15. *Détermination des foyers.* — A l'aide du théorème XI, et sans connaître la position exacte des foyers, on démontrera par le procédé ordinaire que *la tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs allant des foyers au point de contact.*

La démonstration de cette proposition est bien connue, et nous ne la rappellerons pas. Cependant nous ferons remarquer qu'elle repose uniquement sur cette propriété : *La somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante,* et la position exacte des foyers n'y joue aucun rôle.

Considérons alors le diamètre qui contient les foyers. Soient M l'extrémité de ce diamètre, TT′ la tangente en M (*fig.* 6) ; les rayons vecteurs sont confondus.

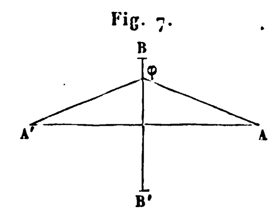
Fig. 6.

T
M
F′
F
T′

Or l'angle TMF doit être égal à l'angle T′MF : donc le diamètre FF′ doit être normal à la courbe, et les foyers, s'ils existent, ne peuvent se trouver que sur l'un des axes.

Supposons que les foyers soient sur le petit axe. Soient φ

Fig. 7.



l'un des foyers et AA′ le grand axe (*fig.* 7).

Puisque la somme des distances aux extrémités d'un diamètre est constante, on aura, en la désignant par S,

$$S = \varphi B + \varphi B' = \varphi A + \varphi A,$$

ce qui est impossible, puisque l'on a

$$\varphi A + \varphi A' > AA'$$

et, à plus forte raison,

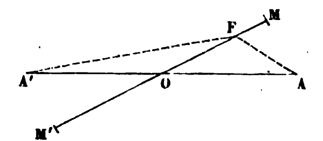
$$\varphi A + \varphi A' > BB'.$$

Ainsi les foyers sont sur le grand axe, et la somme S est égale à $2a$, a désignant le demi-grand axe.

On obtient par suite les foyers en décrivant du point B *comme centre une circonférence de rayon égal à a.* Cette circonférence coupe AA' en deux points et, par suite, il y a deux foyers dans l'ellipse.

16. On aurait pu arriver aux mêmes conclusions sans faire intervenir la propriété de la tangente. En effet, soient F un foyer intérieur à la courbe, MM' le diamètre qui passe par ce point (*fig.* 8) et AA' le grand axe. La

Fig. 8.



somme des distances du point F aux extrémités d'un diamètre étant constante, on aura, en la désignant par S,

$$S = FM + FM' = FA + FA'.$$

Or $FA + FA' > AA'$ et à plus forte raison plus grand que MM' : donc, pour que l'égalité précédente puisse avoir lieu, il faut que le point F soit sur AA', et l'on achèvera comme plus haut. (*A suivre.*)

ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. FORESTIER.

1. Soit
$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$$
l'équation générale du quatrième degré.

Pour trouver l'équation aux différences, on doit remplacer x par $x + y$, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c} x^4 + 4y & x^3 + 6y^2 & x^2 + 4y^3 & x + y^4 \\ + p_1 & + 3p_1 y & + 3p_1 y^2 & + p_1 y^3 \\ & + p_2 & + 2p_2 y & + p_2 y^2 \\ & & + p_3 & + p_3 y \\ & & & + p_4 \end{array}\right\} = 0,$$

et l'on doit éliminer x entre l'équation donnée et celle-ci. L'équation résultante en y est l'équation cherchée.

2. Si l'on effectue cette élimination par la méthode de Sylvester, on est conduit à un déterminant du huitième ordre qui contient 40 320 termes, dont chacun est le produit de huit facteurs, qui, pour la plupart, sont des polynômes en y pouvant avoir jusqu'à cinq termes. Plusieurs d'entre eux sont nuls, parce que, parmi les soixante-quatre facteurs qui concourent à les former, il y en a douze qui sont égaux à zéro. Néanmoins, malgré la simplification considérable que cette circonstance apporte dans l'expression, le calcul paraît impraticable.

3. En employant la méthode d'élimination de Bézout, on obtient un déterminant du quatrième ordre, dont le

développement n'a plus que vingt-quatre termes. Mais chacun de ses termes est un polynôme de degré élevé par rapport à y. Plusieurs sont du seizième degré, quoique le résultat final doive se réduire au douzième. En outre, les coefficients des puissances de y sont eux-mêmes des polynômes dépendant de $p_1, p_2, \ldots$. Il serait encore très difficile de mener à bien un pareil calcul.

Les autres méthodes d'élimination ne réussissent pas mieux.

4. Les méthodes que j'ai employées sont relativement très courtes, quoique l'ensemble soit encore un travail de longue haleine. Ces procédés ont le grand avantage de fractionner le calcul. Chaque coefficient s'obtient séparément et indépendamment des autres. Chacun de ces coefficients est lui-même calculé par fractions indépendantes, ce qui donne une grande simplicité et surtout une grande sûreté.

5. Le but de ce travail est d'exposer ces méthodes et d'entrer dans tous les détails du calcul de deux des coefficients. Il est inutile de les reproduire pour chacun des autres. Il suffira de donner les résultats soigneusement contrôlés.

6. Soit

$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0 \tag{1}$$

l'équation du quatrième degré. L'équation aux différences sera du douzième degré, et l'équation aux carrés des différences sera du sixième degré. Soit donc

$$z^6 + Q_1 z^5 + Q_2 z^4 + Q_3 z^3 + Q_4 z^2 + Q_5 z + Q_6 = 0 \tag{2}$$

cette équation.

Les coefficients Q_1, Q_2, Q_3, ... sont des fonctions des différences des quatre racines de l'équation (1). Si je désigne ces racines par α, β, γ, δ, nous aurons

$$-Q_1 = \Sigma(\alpha-\beta)^2, \quad Q_2 = \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2,$$
$$-Q_3 = \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2, \quad \ldots.$$

Le signe Σ s'étend à toutes les différences que l'on peut faire entre les quatre racines.

7. Chaque coefficient Q_1, Q_2, Q_3, ... est une fonction symétrique des racines de l'équation (1), et son expression, en fonction de p_1, p_2, p_3 et p_4, est une fonction entière de ces coefficients. En outre, la somme des indices des facteurs p_1, p_2, p_3, p_4, dans chaque terme de chacune de ces expressions, est constante et égale au degré de l'expression en fonction des racines; ainsi, dans Q_3, cette somme d'indices sera égale à 6.

En effet, soit

$$-Q_3 = \varphi(p_1, p_2, p_3, p_4) = \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2.$$

Je multiplie toutes les racines de l'équation (1) par k. Cette équation devient

$$x^4 + kp_1x^3 + k^2p_2x^2 + k^3p_3x + k^4p_4 = 0.$$

En général, le coefficient p_n de l'équation (1) devient k^np_n dans la nouvelle équation. Nous aurons donc

$$\begin{aligned}&\varphi(kp_1, k^2p_2, k^3p_3, k^4p_4)\\ &\quad = \Sigma[(k\alpha-k\beta)^2(k\alpha-k\gamma)^2(k\alpha-k\delta)^2]\\ &\quad = k^6\Sigma[(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2] = k^6\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4).\end{aligned}$$

Donc la fonction φ est homogène par rapport aux indices de p et du sixième degré.

8. Le degré de $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4)$, expression de $-Q_3$, c'est-à-dire le nombre des facteurs du terme qui en a le plus, est égal à la plus haute puissance des racines en-

trant dans l'expression de ce coefficient en fonction des racines.

En effet, désignons par q_1 la somme des trois racines β, γ, δ, et par q_2, q_3, q_4 les sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois et quatre à quatre. Nous aurons

$$p_1 = -\alpha - q_1,\quad p_2 = \alpha q_1 + q_2,$$
$$p_3 = \alpha q_2 + q_3,\quad p_4 = \alpha q_3 + q_4.$$

Substituons ces valeurs dans $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Nous devons reproduire $\Sigma[(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2]$. Or, si la fonction φ contenait des termes supérieurs au sixième, le résultat de la substitution contiendrait des puissances de α supérieures à 6, qui ne pourraient pas se réduire, et l'on ne retrouverait pas le résultat prévu. Donc la fonction φ n'est pas d'un degré supérieur au sixième. On voit de même qu'elle n'est pas d'un degré inférieur.

9. Ces deux propriétés nous permettent d'écrire immédiatement l'expression littérale de chaque coefficient. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} -Q_3 = {} & A p_4 p_2 + B p_4 p_1^2 + C p_3^2 + D p_3 p_2 p_1 \\ & + E p_3 p_1^3 + F p_2^3 + G p_2^2 p_1^2 + H p_2 p_1^4 + I p_1^6. \end{aligned}$$

Dans $Q_4 = \Sigma[(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2]$, la somme des indices de chaque terme doit être 8, et le degré, 6. On a donc

$$\begin{aligned} Q_4 = {} & A p_4^2 + B p_4 p_3 p_1 + C p_4 p_2^2 + D p_4 p_2 p_1^2 \\ & + E p_4 p_1^4 + F p_3^2 p_2 + G p_3^2 p_1^2 + H p_3 p_2^2 p_1 \\ & + I p_3 p_1^5 + K p_3 p_2 p_1^3 + L p_2^4 + M p_2^3 p_1^2 + N p_2^2 p_1^4. \end{aligned}$$

Les mêmes lettres dans les deux expressions ne représentent pas les mêmes nombres. Les expressions sont indépendantes l'une de l'autre, et les lettres A, B, ...

représentent les coefficients inconnus de chaque polynôme, coefficients qui restent à déterminer.

10. Nous avons vu que Q_1, Q_2, ... sont des fonctions des différences des racines de l'équation (1). Mais toute fonction de la différence des racines d'une équation doit satisfaire à une équation différentielle qui provient de ce que cette fonction ne doit pas changer quand on augmente d'une même quantité toutes les racines de cette équation. Je vais établir cette relation, qui me servira dans le calcul des quantités Q_1, Q_2, Q_3, ...

Soit

$$(3)\begin{cases} f(x) = 0, \\ \text{ou} \\ x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \end{cases}$$

une équation donnée, et

$$(4)\qquad \varphi(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

une fonction quelconque de la différence de ses racines exprimée au moyen des coefficients de l'équation. Je remplace, dans l'équation (3), x par $x+\lambda$, ce qui revient à augmenter de $-\lambda$ chaque racine de cette équation. Je développe le résultat $f(x+\lambda) = 0$ suivant les puissances croissantes de λ :

$$(5)\begin{cases} f(x) + \frac{\lambda}{1}[n x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + (n-2) p_2 x^{n-3} + \ldots] \\ \qquad + \frac{\lambda^2}{1.2}[n(n-1)x^{n-2} + \ldots]\ldots = 0. \end{cases}$$

J'ordonne maintenant cette équation suivant les puissances décroissantes de x, j'aurai

$$x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + P_3 x^{n-3} + \ldots + P_n = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned}
P_1 &= p_1 + n\lambda,\\
P_2 &= p_2 + (n-1)p_1\lambda + \frac{n(n-1)}{1.2}p_2\lambda^2,\\
P_3 &= p_3 + (n-2)p_2\lambda + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_k &= p_k + (n-k+1)p_{k-1}\lambda + \ldots.
\end{aligned}$$

Le coefficient de λ dans chacune de ces expressions est donné par la quantité dans la première parenthèse de l'équation (5).

La fonction (4) de la différence des racines deviendra

$$\varphi(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n).$$

Je la développe suivant les puissances de λ :

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$
$$+\lambda\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\frac{dP_1}{d\lambda}+\frac{d\varphi}{dp_2}\frac{dP_2}{d\lambda}+\frac{d\varphi}{dp_3}\frac{dP_3}{d\lambda}+\ldots\right)+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(\ldots\right).$$

Mais

$$\frac{dP_1}{d\lambda}=n,\quad \frac{dP_2}{d\lambda}=(n-1)p_1,\quad \frac{dP_3}{d\lambda}=(n-2)p_2,\quad \ldots.$$

Cette fonction ne change pas avec λ, donc chaque coefficient de λ est nul, et l'on a

$$(6)\quad n\frac{d\varphi}{dp_1}+(n-1)p_1\frac{d\varphi}{dp_2}+(n-2)p_2\frac{d\varphi}{dp_3}+\ldots=0.$$

Cette relation doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de p_1, p_2, p_3, ... Si elle est entière, le coefficient de chaque terme sera nul, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de termes.

Si l'expression φ est l'une de celles que nous avons à considérer, où la somme des indices des facteurs de chaque terme est constante, il est facile de voir que l'équation (6) sera du même degré que φ, mais que la somme des indices dans chaque terme sera moindre d'une unité. Cela fournira un contrôle des calculs.

Calcul du coefficient Q_3.

11. Nous avons trouvé

$$\begin{aligned}-Q_3 &= \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2\\ &= Ap_4p_2 + Bp_4p_1^2 + Cp_3^2 + Dp_3p_2p_1\\ &\quad + Ep_3p_1^3 + Fp_2^3 + Gp_2^2p_1^2 + Hp_2p_1^4 + Ip_1^6.\end{aligned}$$

Je fais $p_3 = 0$, $p_4 = 0$. Deux des racines de l'équation (1) sont nulles, et les quatre racines sont α, β, 0, 0. L'expression $\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2$ devient facile à calculer; on trouve

$$(\alpha-\beta)^2[(\alpha^2+\beta^2)^2+2\alpha^2\beta^2]+2\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Les racines α et β sont données par l'équation

$$x^2+p_1x+p_2=0,$$

et les fonctions de ces deux racines qui entrent dans l'expression précédente s'obtiennent presque sans calcul.

On trouve $(\alpha-\beta)^2 = p_1^2 - 4p^2$, $\alpha^2+\beta^2 = p_1^2 - 2p_2$ et $\alpha\beta = p_2$. En substituant, l'expression de $-Q_3$ devient

$$-28p_2^3+24p_2^2p_1^2-8p_2p_1^4+p_1^6.$$

Mais, d'un autre côté, la valeur de $-Q_3$, par l'hypothèse $p_3=0$, $p_4=0$, devient

$$Fp_2^3+Gp_2^2p_1^2+Hp_2p_1^4+Ip_1^6,$$

d'où je déduis par comparaison

$$F=-28,\quad G=24,\quad H=-8,\quad I=1,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}-Q_3 &= Ap_4p_2 + Bp_4p_1^2 + Cp_3^2 + Dp_3p_2p_1\\ &\quad + Ep_3p_1^3 - 28p_2^3 + 24p_2^2p_1^2 - 8p_2p_1^4 + p_1^6,\end{aligned}$$

et il ne reste plus que cinq coefficients à déterminer.

12. Pour calculer ces coefficients, j'aurai recours à l'équation différentielle (6), qui devient, pour l'équation donnée,

$$4\frac{d\varphi}{dp_1} + 3p_1\frac{d\varphi}{dp_2} + 2p_2\frac{d\varphi}{dp_3} + p_3\frac{d\varphi}{dp_4} = 0.$$

En la développant pour la fonction $-Q_3$, on obtient

$$\begin{aligned}(3A+8B)&p_4p_1\\ &+(A+4C+4D)p_3p_2+(B+3D+12E)p_3p_1^2\\ &+(2D-60)p_2^2p_1+(2E+16)p_2p_1^3+(24-24)p_1^5=0.\end{aligned}$$

J'égale à zéro chaque coefficient, et j'ai ainsi une identité et les cinq équations suivantes, pour déterminer les cinq coefficients inconnus :

$$3A+8B=0,\quad A+4C+4D=0,\quad B+3D+12E=0,$$
$$2D-60=0,\quad 2E+16=0;$$

d'où l'on tire

$$A=-16,\quad B=6,\quad C=-26,\quad D=30,\quad E=-8.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}-Q_3=-16p_4p_2+6p_4p_1^2-26p_3^2+30p_3p_2p_1\\ -8p_3p_1^3-28p_2^3+24p_2^2p_1^2-8p_2p_1^4+p_1^6.\end{aligned}$$

Calcul de Q_4.

13. Nous savons que

$$Q_4=\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2.$$

Son expression en fonction de p_1, p_2, p_3, p_4 sera du sixième degré par rapport au nombre des facteurs (8), et par rapport aux indices, elle sera homogène et du huitième ordre (7). Nous aurons donc

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}Q_4=Ap_4^2+Bp_4p_3p_1+Cp_4p_2^2+Dp_4p_2p_1^2\\ +Ep_4p_1^4+Fp_3^2p_2+Gp_3^2p_1^2+Hp_3p_2^2p_1\\ +Ip_3p_1^5+Kp_3p_2p_1^3+Lp_2^4+Mp_2^3p_1^2+Np_2^2p_1^4.\end{aligned}\right.$$

14. On pourrait, comme dans le calcul de Q_3, faire $p_3 = 0$, $p_4 = 0$, pour exprimer, dans ce cas particulier, Q_4 en fonction de p_1 et p_2, et déterminer un certain nombre de coefficients. Mais, pour avoir un plus grand nombre de vérifications par l'équation différentielle, faisons seulement $p_4 = 0$. Alors

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2$$

se réduit à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha^2\beta^2\gamma^2[(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2]+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)\\ &\quad\times[(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2]\\ &\quad+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2.\end{aligned}\right.$$

Les trois parenthèses qui dépendent des différences des racines sont les coefficients, au signe près, de l'équation aux carrés des différences de l'équation du troisième degré

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0.$$

Cette équation est connue : c'est

$$\begin{aligned} &x^3+(6p_2-2p_1^2)x^2+(9p_2^2-6p_2p_1^2+p_1^4)x\\ &\quad+(27p_3^2+4p_3p_1^3+4p_2^3-18p_3p_2p_1-p_2^2p_1^2)=0.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=-6p_2+2p_1^2,$$

$$\begin{aligned} &(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2\\ &\quad=9p_2^2-6p_2p_1^2+p_1^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2\\ &\quad=-27p_3^2-4p_3p_1^3+18p_3p_2p_1-4p_2^3+p_2^2p_1^2.\end{aligned}$$

Les trois parenthèses qui dépendent de α, β, γ sont aussi, au signe près, les coefficients de l'équation aux carrés des racines de l'équation proposée, équation que l'on obtient en changeant dans (1) x en $\sqrt{x}$. Cette équation est

$$x^3+(2p_2-p_1^2)x^2+(p_2^2-2p_3p_1)x-p_3^2=0;$$

d'où l'on tire

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = p_3^2,$$
$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = -2p_3p_1 + p_2^2,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2p_2 + p_1^2.$$

En substituant dans l'expression (8), nous obtenons

$$48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1$$
$$- 6p_3p_1^5 + 38p_3p_2p_1^3 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4.$$

En faisant $p_4 = 0$ dans (7), et comparant le résultat à ce dernier, nous en déduisons

$$F = 48,\quad G = -25,\quad H = -54,\quad I = -6,\quad K = 38,$$
$$L = 17,\quad M = -12,\quad N = 2,$$

et il ne reste plus que les cinq premiers coefficients à déterminer.

15. Nous avons donc

$$Q_4 = Ap_4^2 + Bp_4p_3p_1 + Cp_4p_2^2 + Dp_4p_2p_1^2$$
$$+ Ep_4p_1^4 + 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1$$
$$+ 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4.$$

L'équation différentielle (6) appliquée à cette fonction devient, ainsi que nous l'avons déjà dit (12),

$$4\frac{d\varphi}{dp_1} + 3p_1\frac{d\varphi}{dp_2} + 2p_2\frac{d\varphi}{dp_3} + p_3\frac{d\varphi}{dp_4} = 0,$$

et elle donne

$$(2A + 3B)p_4p_3 + 2(B + 3C + 4D)p_4p_2p_1$$
$$+ (3D + 16E)p_4p_1^3 + (B - 56)p_3^2p_1 + (C - 24)p_3p_2^2$$
$$+ (D + 32)p_3p_2p_1^2 + (E - 6)p_3p_1^4 + 0.p_2^3p_1$$
$$+ 0.p_2^2p_1^3 + 0.p_2p_1^5 = 0.$$

Chaque coefficient devant être nul, nous obtenons sept équations et trois identités qui sont trois vérifications. En résolvant les sept équations, nous obtenons les valeurs

des cinq coefficients inconnus, et deux nouvelles vérifications. Les valeurs des coefficients sont

$$A = -112,\quad B = 56,\quad C = 24,\quad D = -32,\quad E = 6.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}Q_4 = &-112p_4^2 + 56p_4p_3p_1 + 24p_4p_2^2\\ &- 32p_4p_2p_1^2 + 6p_4p_1^4 + 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1\\ &+ 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4.\end{aligned}$$

Conclusion.

16. L'équation

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$$

a pour équation aux carrés des différences

$$x^6 + Q_1x^5 + Q_2x^4 + Q_3x^3 + Q_4x^2 + Q_5x + Q_6 = 0.$$

Les valeurs des coefficients sont

$$\begin{aligned}Q_1 = &\ \ 8p_2 - 3p_1^2,\\ Q_2 = &\ \ 8p_4 - 2p_3p_1 + 22p_2^2 - 16p_2p_1^2 + 3p_1^4,\\ Q_3 = &\ \ 16p_4p_2 - 6p_4p_1^2 + 26p_3^2 - 30p_3p_2p_1 + 8p_3p_1^3 + 28p_2^3\\ &- 24p_2^2p_1^2 + 8p_2p_1^4 - p_1^6,\\ Q_4 = &-112p_4^2 + 56p_4p_3p_1 + 24p_4p_2^2 - 32p_4p_2p_1^2 + 6p_4p_1^4\\ &+ 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1 + 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5\\ &+ 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4,\\ Q_5 = &-192p_4^2p_2 + 72p_4^2p_1^2 + 216p_4p_3^2 - 120p_4p_3p_2p_1\\ &+ 18p_4p_3p_1^3 + 32p_4p_2^3 - 6p_4p_2^2p_1^2 - 54p_3^3p_1 + 18p_3^2p_2^2\\ &+ 42p_3^2p_2p_1^2 - 9p_3^2p_1^4 - 26p_3p_2^3p_1 + 6p_3p_2^2p_1^3\\ &+ 4p_2^5 - p_2^4p_1^2,\\ Q_6 = &\ \ 256p_4^3 - 192p_4^2p_3p_1 - 128p_4^2p_2^2 + 144p_4^2p_2p_1^2\\ &- 27p_4^2p_1^4 + 144p_4p_3^2p_2 - 6p_4p_3^2p_1^2 - 80p_4p_3p_2^2p_1\\ &+ 18p_4p_3p_2p_1^3 + 16p_4p_2^4 - 4p_4p_2^3p_1^2 - 27p_3^4\\ &+ 18p_3^3p_2p_1 - 4p_3^3p_1^3 - 4p_3^2p_2^3 + p_3^2p_2^2p_1^2.\end{aligned}$$

SUR UN ALGORITHME ALGÉBRIQUE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Représentons le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynôme $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$, où l'on remplace tous les coefficients par l'unité, à l'aide de la notation

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}.$$

Cet algorithme jouit des propriétés suivantes ([1]) :

$$(1)\quad [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m)} + a_p [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-1)},$$

$$(2)\quad \begin{cases} [a_2 a_3 \ldots a_{p+1}]^{(m)} - [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} \\ \quad = (a_{p+1} - a_1)(a_1 a_2 \ldots a_{p+1}]^{(m-1)}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m)} \\ \quad + a_p [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m-1)} + a_p^2 [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m-2)} + \ldots + a_p^m. \end{cases}$$

Dans le cas où

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad \ldots, \quad a_p = p,$$

nous poserons

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [1_p]^{(m)}.$$

Nous pourrons facilement calculer, par voie récurrente, les quantités $[1_p]^{(m)}$.

([1]) Ma Note, rédigée il y a un an, à l'École Polytechnique, avait primitivement pour but l'étude de cet algorithme dont je croyais l'idée nouvelle et dont j'avais trouvé quelques propriétés. Mais M. Brisse, m'ayant appris que cet algorithme avait déjà été étudié par Wronski qui le nommait fonction *aleph* et en avait fait un fréquent usage, je me borne à énoncer celles des propriétés dont j'aurai besoin pour la présente application, extraite de mon travail primitif, et qui, je crois, est nouvelle. Ma notation est d'ailleurs, au signe *aleph* près, celle de Wronski.

En effet, la formule (1) donne, dans ce cas,

$$[1_p]^{(m)} = [1_{p-1}]^{(m)} + p[1_p]^{(m-1)},$$

et l'on a les conditions initiales

$$[1_1]^{(m)} = 1, \quad [1_p]^{(1)} = \frac{p(p+1)}{2}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{array}{lllll}
[1_1]^{(1)} = 1, & [1_2]^{(1)} = 3, & [1_3]^{(1)} = 6, & [1_4]^{(1)} = 10, & \ldots, \\
[1_1]^{(2)} = 1, & [1_2]^{(2)} = 7, & [1_3]^{(2)} = 25, & [1_4]^{(2)} = 65, & \ldots, \\
[1_1]^{(3)} = 1, & [1_2]^{(3)} = 15, & [1_3]^{(3)} = 90, & [1_4]^{(3)} = 350, & \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots.
\end{array}$$

Ces nombres sont identiques à certains coefficients envisagés par M. Schlömilch dans un Mémoire sur les *facultés analytiques*. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

α étant un nombre entier, faisons maintenant

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \alpha + 1, \quad \ldots, \quad a_p = \alpha + p - 1,$$

et posons

$$[\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)]^{(m)} = [\alpha_p]^{(m)}.$$

Pour calculer les nombres $[\alpha_p]^{(m)}$ à l'aide des nombres $[1_p]^{(m)}$, appliquons la formule (2); elle donne

$$\begin{array}{l}
[2_p]^{(m)} = [1_p]^{(m)} + p[1_{p+1}]^{(m-1)}, \\
[3_p]^{(m)} = [2_p]^{(m)} + p[2_{p+1}]^{(m-1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[\alpha_p]^{(m)} = [(\alpha-1)_p]^{(m)} + p[(\alpha-1)_{p+1}]^{(m-1)}.
\end{array}$$

On déduit de là que

$$\begin{aligned}
[\alpha_p]^{(m)} = [1_p]^{(m)} &+ \frac{\alpha-1}{1} p[1_{p+1}]^{(m-1)} \\
&+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2} p(p+1)[1_{p+2}]^{(m-2)} + \ldots \\
&+ p(p+1)\ldots(p+\alpha-2)[1_{p+\alpha-1}]^{(m-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Mais on peut aussi calculer directement, par voie récurrente, les nombres $[\alpha_p]^{(m)}$. La formule (1) donne, en effet, pour ces nombres,

$$[\alpha_p]^{(m)} = [\alpha_{p-1}]^{(m)} + (\alpha + p - 1)[\alpha_p]^{(m-1)},$$

et l'on a les conditions initiales

$$[\alpha_1]^{(m)} = \alpha^m,$$

$$[\alpha_p]^{(1)} = \alpha + (\alpha + 1) + \ldots + [\alpha + (p - 1)] = \frac{p(2\alpha + p - 1)}{2}.$$

Tous les nombres qui viennent d'être définis jouent un rôle dans la théorie des facultés analytiques. Je vais, en effet, démontrer que

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{(z-\alpha)[z-(\alpha+1)]\ldots[z-(\alpha+p-1)]} \\ &\quad = \frac{1}{z^p} + \frac{[\alpha_p]^{(1)}}{z^{p+1}} + \frac{[\alpha_p]^{(2)}}{z^{p+2}} + \ldots + \frac{[\alpha_p]^{(m)}}{z^{p+m}} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

la valeur de z étant, bien entendu, supposée choisie de façon à rendre la série convergente. On a

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{[\alpha_p]^{(m+1)}}{[\alpha_p]^{(m)}}\,\frac{1}{z}.$$

Mais

$$\frac{[\alpha_p]^{(m+1)}}{[\alpha_p]^{(m)}} < \alpha + \ldots + (\alpha + p - 1).$$

La série sera donc convergente pour

$$z > \alpha + \ldots + (\alpha + p - 1).$$

La formule se vérifiant immédiatement pour $p = 1$, faisons voir que si elle a lieu pour la valeur $p - 1$, elle est encore vraie pour la valeur p.

Supposons alors que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(z-\alpha)\ldots[z-(\alpha+p-2)]} \\ &\quad = \frac{1}{z^{p-1}} + \frac{[\alpha_{p-1}]^{(1)}}{z^p} + \frac{[\alpha_{p-1}]^{(2)}}{z^{p+1}} + \ldots + \frac{[\alpha_{p-1}]^{(m)}}{z^{p+m-1}} + \ldots \end{aligned}$$

Cette série est évidemment convergente pour toute valeur de z qui rend la précédente convergente; pour cette valeur de z, on a également

$$\frac{1}{z-(\alpha+p-1)} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha+p-1}{z^2} + \frac{(\alpha+p-1)^2}{z^3} + \ldots + \frac{(\alpha+p-1)^m}{z^{m+1}} + \ldots.$$

Faisons le produit de ces deux développements; le coefficient du terme en $\frac{1}{z^{m+p}}$ est

$$[\alpha_{p-1}]^{(m)} + (\alpha+p-1)[\alpha_{p-1}]^{(m-1)} + (\alpha+p-1)^2[\alpha_{p-1}]^{(m-2)} + \ldots + (\alpha+p-1)^m,$$

ou, d'après la formule (3),

$$[\alpha_p]^{(m)}.$$

La proposition est par suite établie.

Dans le cas particulier où $\alpha = 1$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)\ldots(z-p)} = \frac{1}{z^p} + \frac{[1_p]^{(1)}}{z^{p+1}} + \frac{[1_p]^{(2)}}{z^{p+2}} + \ldots + \frac{[1_p]^{(m)}}{z^{p+m}} + \ldots.$$

C'est ce développement que M. Schlömilch envisage, dans son Mémoire *Sur les coefficients des facultés analytiques* (1). Il désigne le coefficient du terme en $\frac{1}{z^{m+p}}$ par $\overset{-p}{C}_m$, et en donne l'expression

$$\overset{-p}{C}_m = \frac{p^{p+m} - \frac{p}{1}(p-1)^{p+m} + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^{p+m} - \ldots + (-1)^{p-2}\frac{p(p-1)}{1.2}(2)^{p+m} + (-1)^{p-1}\frac{p}{1}}{1.2.3\ldots p}.$$

Mais, d'après la formule précédente, on a

$$\overset{-p}{C}_m = [1_p]^{(m)};$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 44, p. 344.

la comparaison de ces deux expressions fournit un théorème.

Il est facile d'avoir la fonction génératrice du nombre $[\alpha_p]^{(m)}$. Multipliant les deux membres de la formule (4) par z^p et posant $\frac{1}{z} = x$, nous avons

$$\frac{1}{(1-\alpha x)[1-(\alpha+1)x]\dots[1-(\alpha+p-1)x]} = 1 + [\alpha_p]^{(1)}x + \dots + [\alpha_p]^{(m)}x^m + \dots.$$

La fonction génératrice est donc

$$\frac{1}{(1-\alpha x)[1-(\alpha+1)x]\dots[1-(\alpha+p-1)x]},$$

et l'on a

$$[\alpha_p]^{(m)} = \frac{1}{1.2\dots m} \times \left[D^m \frac{1}{(1-\alpha x)[1-(\alpha+1)x]\dots[1-(\alpha+p-1)x]}\right]_{x=0}.$$

Tous ces résultats relatifs aux facultés analytiques se généralisent facilement, la démonstration étant identique.

Soit

$$f(z) = z^p + A_1 z^{p-1} + \dots + A_{p-1} z + A_p = 0$$

une équation ayant toutes ses racines $a_1, a_2, \dots, a_p$ réelles. On a

$$(5) \quad \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^p} + \frac{[a_1 a_2 \dots a_p]^{(1)}}{z^{p+1}} + \dots + \frac{[a_1 a_2 \dots a_p]^{(m)}}{z^{p+m}} + \dots,$$

et cette série est convergente pour $z > a_1 + a_2 + \dots + a_p$.

Multipliant les deux membres par z^p, posant

$$z = \frac{1}{x}$$

et

$$\varphi(x) = 1 + A_1 x + \dots + A_{p-1} x^{p-1} + A_p x^p,$$

on a

$$(6) \quad \frac{1}{\varphi(x)} = 1 + [a_1 a_2 \dots a_p]^{(1)} x + \dots + [a_1 a_2 \dots a_p]^{(m)} x^m + \dots.$$

La fonction génératrice de $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$ est donc $\frac{1}{\varphi(x)}$, et l'on a (¹)

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = \frac{1}{1.2\ldots m}\left[D^m \frac{1}{\varphi(x)}\right]_{x=0}.$$

Mais la formule (5) va nous conduire à un résultat plus intéressant.

En effet, si, d'une manière générale, nous désignons par a une racine de l'équation

$$f(z) = 0,$$

nous avons

$$\frac{1}{f(z)} = \sum \frac{1}{f'(a)(z-a)},$$

ou, en supposant toujours prise pour z une valeur qui rende le développement de $\frac{1}{f(z)}$ convergent,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z}\sum \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{z^2}\sum \frac{a}{f'(a)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{z^p}\sum \frac{a^{p-1}}{f'(a)} + \ldots + \frac{1}{z^{p+m}}\sum \frac{a^{p-1+m}}{f'(a)} + \ldots.$$

Identifiant cette formule avec la formule (5), nous voyons que

$$\sum \frac{a^k}{f'(a)} = 0 \quad \text{pour } k \leq p-2,$$

que

$$\sum \frac{a^{p-1}}{f'(a)} = 1;$$

(¹) M. Brisse, en me signalant la théorie des fonctions *aleph* de Wronski, m'a indiqué, dans le *Journal de M. Resal*, t. VII, p. 1, un article de M. West que je ne connaissais point et que j'aurais pu utilement consulter; j'ai trouvé, dans cet article, une formule qui est, à très peu près, la même que la formule (6) et qui est attribuée à M. Hanegraeff. Je tiens à mentionner ce fait, qui n'est venu à ma connaissance que longtemps après la rédaction de mon travail.

enfin, d'une manière générale, que

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = \sum \frac{a^{p-1+m}}{f'(a)},$$

formule remarquable, puisqu'elle permet très aisément d'obtenir la valeur de $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$, quand on a formé le polynôme $f(z)$ qui, égalé à zéro, admet pour racines les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\sum \frac{a^n}{f'(a)} = [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(n-p+1)},$$

n étant supposé $\geq p$.

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE FAMILLE DE POLYGONES QUE L'ON PEUT FORMER AVEC UN POLYGONE DONNÉ;

Par M. L.-F. IBACH,

Étudiant à la Faculté des Sciences de Marseille.

I. Considérons un polygone dont les n sommets sont désignés par les n premiers nombres : 1, 2, 3, ..., n, et imaginons que ses côtés 12, 23, ... soient divisés dans des rapports $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots$; la figure obtenue en joignant successivement les points de division sera un nouveau polygone, que nous désignerons, pour abréger, par polygone $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots)$ du premier et dont nous allons étudier quelques propriétés. Nous nous bornerons d'ailleurs à donner l'expression de la surface du polygone résultant, pour passer de suite à l'examen d'un cas particulier, celui du triangle, où nous rencontrerons quelques propriétés qui pourraient être dignes d'attention.

II. *Expression de la surface du polygone résultant.* — Appelons a_{12}, a_{23} les sommets de ce dernier. Il est clair que la surface S est égale à la surface s du polygone donné moins la somme des triangles analogues à $(a_{12}, 2, a_{23})$. D'ailleurs, si $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ sont les coordonnées des sommets $1, 2, 3, \ldots, x_{12}, y_{12}, \ldots$ celles de $a_{12}, a_{23}, \ldots$, nous aurons

$$x_{12} = \frac{\alpha_{12} x_1 + x_2}{\alpha_{12} + 1}, \quad y_{12} = \frac{\alpha_{12} y_1 + y_2}{\alpha_{12} + 1},$$

les autres s'obtenant par une permutation circulaire. D'après cela, la surface du triangle $(a_{12}, 2, a_{23})$ sera donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha_{12} x_1 + x_2}{\alpha_{12} + 1} & \dfrac{\alpha_{12} y_1 + y_2}{\alpha_{12} + 1} & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{\alpha_{23} x_2 + x_3}{\alpha_{23} + 1} & \cdots & . \end{vmatrix}.$$

Or, ce dernier se réduit à $\dfrac{\alpha_{12}(123)}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)}$, où (123) représente la surface du triangle formé par ces trois sommets. Il en résulte que nous avons

$$S = s - \sum_1^n \frac{\alpha_{12}(123)}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)},$$

le signe $\sum_1^n$ indiquant qu'il faut permuter les indices n fois, afin de faire le tour du polygone.

III. *Expression de la surface du triangle résultant.* — Dans le cas particulier du triangle, la formule précédente devient

$$S = s - \frac{\alpha_{12}(123)}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)} - \frac{\alpha_{23}(231)}{(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1)} - \frac{\alpha_{31}(312)}{(\alpha_{31}+1)(\alpha_{12}+1)},$$

et, en remarquant que (123), (231), (312) ne sont autre

chose que s,

$$(1) \qquad S = s\,\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1)}.$$

Lorsque les côtés sont divisés dans le même rapport α,

$$S = s\,\frac{\alpha^3+1}{(\alpha+1)^3}.$$

La formule (1) montre que *la surface du résultant est proportionnelle à celle du triangle donné*. De plus, comme elle est symétrique en α_{12}, α_{23}, α_{31}, elle indique que tous les triangles résultants que l'on pourra former avec cette série de rapports, en changeant l'ordre de division, sont équivalents; par suite :

Théorème I. — *Les résultants obtenus en permutant sur les côtés la même série de rapports sont équivalents.*

IV. La formule (1) montre aussi que, pour que le rapport $\frac{S}{s}$ soit un nombre donné A, on doit avoir

$$(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1) = A(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1),$$

et cela indique que, deux des rapports étant fixés, il sera toujours possible de déterminer le troisième, pour que la condition ci-dessus soit remplie. En particulier, la condition, pour que le résultant $(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31})$ soit équivalent au triangle fondamental, sera

$$\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31} = -(\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{31}\alpha_{12}),$$

c'est-à-dire qu'il faut que la somme des rapports soit égale et de signe contraire à la somme de leurs produits deux à deux. En d'autres termes, tout faisceau de racines de l'équation

$$x^3+ax^2+ax+b=0,$$

dans laquelle a et b sont complètement arbitraires, pourra former une série de rapports, tels que le triangle résultant correspondant soit équivalent au triangle fondamental.

V. Considérons deux triangles T et T′ de surfaces s et s', et imaginons que l'on en forme les résultants $(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31})$ et $(\alpha'_{12}\alpha'_{23}\alpha'_{31})$. Si S et S′ sont les surfaces de ces derniers, nous aurons

$$S = s\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1)},$$
$$S' = s'\frac{\alpha'_{12}\alpha'_{23}\alpha'_{31}+1}{(\alpha'_{12}+1)(\alpha'_{23}+1)(\alpha'_{31}+1)}.$$

Par suite

$$\frac{S}{S'} = \frac{s}{s'}\,\frac{\dfrac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)\ldots}}{\dfrac{\alpha'_{12}\alpha'_{23}\alpha'_{31}+1}{(\alpha'_{12}+1)\ldots}}.$$

Supposons maintenant que $\alpha'_{12}=\alpha_{12}$, $\alpha'_{23}=\alpha_{23}$, ..., c'est-à-dire que l'on prenne pour les deux triangles la même série de rapports ; nous voyons facilement que :

THÉORÈME II. — *Les surfaces des résultants correspondant à une même série de rapports de deux triangles sont entre elles comme ceux de ces derniers,* et, en particulier :

Les résultants correspondant à la même série de rapports de deux triangles équivalents sont équivalents aussi.

VI. Si l'on a en même temps $S = s$, $S' = s'$, c'est-à-dire si les résultants sont équivalents au triangle correspondant, l'équation (3) devient

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + (\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31}+\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{31}\alpha_{12})$$
$$= \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3 + (\alpha'_{12}+\alpha'_{23}+\alpha'_{31}+\alpha'_{12}\alpha'_{23}\ldots).$$

Or, d'après (IV), le second terme du premier membre, ainsi que celui du second membre, sont identiquement nuls : il reste donc

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = \alpha'_{12}\alpha'_{23}\alpha'_{31},$$

qui s'énonce ainsi :

Théorème. — *Lorsque le résultant est équivalent au triangle de base, le produit des rapports est un nombre constant quel que soit le triangle de base que l'on considère.*

VII. Considérons maintenant n triangles $T_1, T_2, \ldots$ dont les surfaces sont $S_1, S_2, \ldots, S_n$, et imaginons que l'on prenne les résultants de ces triangles en conservant pour tous la même série de rapports; si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ sont alors les surfaces de ces résultants, nous aurons

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \gamma S_1, \\ \sigma_2 &= \gamma S_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_n &= \gamma S_n; \end{aligned}$$

ajoutant,

$$\Sigma\sigma_1 = \Sigma\gamma S_1 = \gamma\Sigma S_1.$$

Si donc on considère un triangle équivalent à la somme des triangles donnés et que l'on forme le résultant de ce triangle, en prenant les mêmes rapports, celui-ci sera équivalent à la somme des résultants formés avec chaque triangle.

VIII. *Des triangles résultants de divers ordres.* — De même que nous avons considéré le triangle $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots)$ résultant d'un triangle donné, nous pouvons former le résultant de ce nouveau triangle avec une série de rapports $(\alpha'_{12}, \alpha'_{23}, \alpha'_{31})$: ce sera alors un résultant du second ordre

du triangle donné. En continuant de la même manière, on obtiendra, après n opérations, un triangle qui sera un résultant du premier ordre par rapport au $(n-1)^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport au triangle donné. La série de rapports changeant toutes les fois, nous nous proposons de résoudre le problème suivant :

IX. *Trouver l'expression générale de la surface d'un résultant du $n^{ième}$ ordre.*

Soient s la surface du triangle donné, et $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les surfaces des résultants successifs. Nous avons, en appliquant la formule (1),

$$S_1 = s\,\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1)},$$

$$S_2 = S_1\,\frac{\alpha'_{12}\alpha'_{23}\alpha'_{31}+1}{(\alpha'_{12}+1)(\alpha'_{23}+1)(\alpha'_{31}+1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_n = S_{n-1}\,\frac{\alpha''^{-1}_{12}\alpha''^{-1}_{23}\alpha''^{-1}_{31}+1}{(\alpha''^{-1}_{12}+1)(\alpha''^{-1}_{23}+1)(\alpha''^{-1}_{31}+1)}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, pour éliminer $S_1, \ldots, S_{n-1}$, nous avons

$$S_n = s\,\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1)}\;\frac{\alpha'_{12}\alpha'_{23}\alpha'_{31}+1}{(\alpha'_{12}+1)\ldots}$$
$$\times\frac{\alpha''_{12}\alpha''_{23}\alpha''_{31}+1}{(\alpha''_{12}+1)\ldots}\cdots\frac{\alpha''^{-1}_{12}\alpha''^{-1}_{23}\alpha''^{-1}_{31}+1}{(\alpha''^{-1}_{12}+1)(\alpha''^{-1}_{23}+)\ldots}.$$

Lorsque, dans la formation des résultants successifs, on a la même série de rapports, la formule devient

$$S_n = s\left[\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+1}{(\alpha_{12}+1)(\alpha_{23}+1)(\alpha_{31}+1)}\right]^n,$$

et enfin, lorsque les côtés sont tous divisés dans le même rapport α_1,

$$S_n = \left[\frac{\alpha_1^3+1}{(\alpha_1+1)^3}\right]^n.$$

X. Ces expressions montrent que les résultants d'ordre quelconque jouissent des mêmes propriétés que ceux du second ordre et leur sont absolument analogues. Ainsi, on a, comme précédemment :

Les résultants d'ordre quelconque de deux triangles correspondant à la même série de rapports sont entre eux comme les surfaces de ces triangles.

En particulier, ils sont équivalents si les deux premiers le sont.

XI. Les résultats précédents montrent de plus que les résultants successifs vont, en général, en diminuant; nous pouvons donc chercher :

La limite vers laquelle tend la somme des n premiers résultants d'un triangle donné, lorsque n tend vers l'infini.

Pour simplifier, nous supposerons que l'on conserve la même série de rapports; nous aurons alors

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma s, \\ S_2 &= \gamma^2 s, \\ S_3 &= \gamma^3 s, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ S_n &= \gamma^n s. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre,

$$\sum_1^n S = \gamma s + \gamma^2 s + \ldots = \gamma s(1 + \gamma + \ldots + \gamma^{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^n S = \gamma s \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1}.$$

Si nous faisons tendre n vers l'infini, la somme tend vers la limite cherchée σ, et nous avons

$$\sigma = \frac{\gamma s}{1 - \gamma}.$$

XI. On peut appliquer à l'étude précédente la méthode des polaires réciproques. Considérons, à cet effet, un triangle (123), son résultant ($\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$) et une conique auxiliaire. Au triangle (123) en correspondra un autre, et aux sommets du résultant, divisant les côtés 12, 23, 31 dans des rapports α_{12}, α_{23}, α_{31}, correspondront trois droites passant par les sommets du triangle polaire et partageant les angles correspondants en des parties dont le rapport des sinus sera α_{12}, α_{23}, α_{31}. Au triangle résultant correspondra donc le triangle formé par ces droites, et comme la surface de ce résultant est donnée par une expression $S = \gamma s$, s désignant la surface du triangle donné, la surface de celui qui est formé par les trois droites ci-dessus sera donnée aussi par une expression de la forme $\Sigma = \gamma' \sigma$, σ étant la surface du triangle polaire de (123). Toutes les propriétés des résultants s'appliquent donc à ces derniers. De l'étude précédente, il résulte, par suite, les deux faits assez singuliers que voici :

Si l'on prend, sur les côtés d'un triangle, trois points quelconques, ou si l'on mène par les sommets trois droites aussi quelconques, les surfaces de ces triangles sont proportionnelles à celle du premier et, par suite, proportionnelles entre elles.

NOTE SUR UN FAISCEAU DE SURFACES D'ORDRE QUELCONQUE;

PAR M. A. LEGOUX.

Soit

$$U = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} + k w^{\varepsilon} = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un système de surfaces d'ordre quelconque. On suppose que x, y, z, u sont les coordonnées homo-

gènes d'un point de l'espace, que $w = ax + by + cz + du$, que $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, et que k est un paramètre variable.

Recherche de la hessienne. — On trouve sans difficulté

$$\frac{dU}{dx} = kw^{\varepsilon-1}\left(a\varepsilon - \frac{\alpha w}{x}\right), \quad \frac{dU}{dy} = kw^{\varepsilon-1}\left(b\varepsilon - \frac{\beta w}{y}\right),$$

$$\frac{dU}{dz} = kw^{\varepsilon-1}\left(c\varepsilon - \frac{\gamma w}{z}\right), \quad \frac{dU}{du} = kw^{\varepsilon-1}\left(d\varepsilon - \frac{\delta w}{u}\right);$$

$$a' = \frac{d^2U}{dx^2} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{a^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2}\right],$$

$$b' = \frac{d^2U}{dy^2} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{b^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\beta(\beta-1)}{y^2}\right],$$

$$c' = \frac{d^2U}{dz^2} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{c^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{z^2}\right],$$

$$d' = \frac{d^2U}{du^2} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{d^2\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\delta(\delta-1)}{u^2}\right];$$

$$f = \frac{d^2U}{dy\,dz} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{bc\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\beta\gamma}{yz}\right],$$

$$g = \frac{d^2U}{dz\,dx} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{ca\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\gamma\alpha}{zx}\right],$$

$$h = \frac{d^2U}{dx\,dy} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{ab\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\alpha\beta}{xy}\right],$$

$$l = \frac{d^2U}{dx\,du} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{ad\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\alpha\delta}{xu}\right],$$

$$m = \frac{d^2U}{dy\,du} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{bd\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\beta\delta}{yu}\right],$$

$$n = \frac{d^2U}{dz\,du} = kw^{\varepsilon}\left[\frac{cd\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2} - \frac{\gamma\delta}{zu}\right].$$

On sait que l'équation de la surface hessienne est

$$\begin{aligned}a'b'c'd' &+ 2a'fmn + 2b'gnl + 2c'hlm + 2d'fgh \\ &- b'c'l^2 - c'a'm^2 - a'b'n^2 - a'd'f^2 - b'd'g^2 - c'd'h^2 \\ &+ f^2l^2 + g^2m^2 + h^2n^2 - 2ghmn - 2hfnl - 2fglm = 0.\end{aligned}$$

Le résultat de la substitution des valeurs de a', b', c', ... dans cette équation paraît au premier abord extrêmement compliqué. Mais si l'on ordonne relativement aux puissances de $\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2}$, on constate à l'inspection de l'équation que les coefficients de $\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2}\right]^4$, $\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2}\right]^3$, $\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{w^2}\right]^2$ sont nuls identiquement, et le résultat final peut s'écrire sous la forme

$$0 = w^{3\varepsilon-2} x^{\alpha-2} y^{\beta-2} z^{\gamma-2} u^{\delta-2} \left| \begin{array}{l} \alpha\beta\gamma\delta\, w^2 - \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \\ \quad \times (2bcyz + 2cazx + 2abxy \\ \qquad + 2adxu + 2bdyu + 2cdzu) \\ \quad + \beta\gamma\delta\varepsilon(\beta+\gamma+\delta-1)a^2x^2 \\ \quad + \alpha\gamma\delta\varepsilon(\alpha+\gamma+\delta-1)b^2y^2 \\ \quad + \alpha\beta\delta\varepsilon(\alpha+\beta+\delta-1)c^2z^2 \\ \quad + \alpha\beta\gamma\varepsilon(\alpha+\beta+\gamma-1)d^2u^2 \end{array} \right|$$

Cette équation se décompose dans les suivantes

$$(2) \qquad w^{3\varepsilon-2} = 0,$$

$$(3) \qquad x^{\alpha-2} y^{\beta-2} z^{\gamma-2} u^{\delta-2} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\alpha\beta\gamma\delta\, w^2 - \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(2bcyz + 2cazx + 2abxy \\ &\qquad + 2adxu + 2bdyu + 2cdzu) \\ &\quad + \beta\gamma\delta\varepsilon(\beta+\gamma+\delta-1)a^2x^2 + \alpha\gamma\delta\varepsilon(\alpha+\gamma+\delta-1)b^2y^2 \\ &\quad + \alpha\beta\delta\varepsilon(\alpha+\beta+\delta-1)c^2z^2 + \alpha\beta\gamma\varepsilon(\alpha+\beta+\gamma-1)d^2u^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation prend la forme plus simple

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}a^2x^2 - \frac{\alpha+\gamma+\delta}{\beta}b^2y^2 - \frac{\alpha+\beta+\delta}{\gamma}c^2z^2 \\ &-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\delta}d^2u^2 + 2bcyz + 2cazx + 2abxy \\ &\qquad\qquad + 2adxu + 2bdyu + 2cdzu = 0; \end{aligned} \right.$$

il suffit pour cela de remplacer w par sa valeur et ε par $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

L'équation (4) représente une surface conique imaginaire du second ordre.

Comme les équations (2), (3) et (4) ne contiennent pas le paramètre k, elles représentent le lieu géométrique des courbes paraboliques [1] tracées sur les surfaces du faisceau. On sait que la surface hessienne passe aussi par les points singuliers et par les lignes multiples des surfaces. Or il n'y a pas d'autres lignes multiples que les intersections des quatre plans x, y, z, u avec le plan w, et il n'y a pas de points singuliers, comme on peut s'en assurer en égalant à zéro les dérivées partielles $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$, $\frac{dU}{du}$. Donc l'équation (4) est bien le lieu des courbes paraboliques tracées sur les surfaces. Les équations (2) et (3) représentent les plans x, y, z, u, w; résultat évident, car ces cinq plans forment des surfaces singulières du système que l'on obtient en faisant soit $k = 0$, soit $k = \infty$. Comme l'équation (4) représente une surface conique, on voit que les courbes paraboliques sont distribuées sur un cône imaginaire du second degré. Si le degré ε est impair, les surfaces ont des inflexions suivant les quatre droites xw, yw, zw, uw, c'est-à-dire que le plan tangent suivant ces droites coupe la surface; si ε est pair, la surface est tout entière du même côté du plan tangent dans le voisinage de chacune de ces droites. (*A suivre.*)

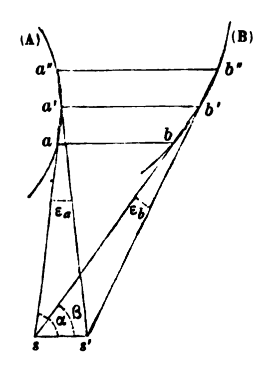
---

[1] On sait que, de même que la courbe hessienne dans le plan rencontre une courbe aux points d'inflexion, la surface hessienne rencontre une surface suivant une courbe dont tous les points ont une indicatrice parabolique, et qu'on appelle *courbe parabolique*. Dans le plan, la hessienne passe aussi aux points singuliers; dans l'espace, la surface hessienne contient les courbes multiples et passe par les points singuliers.

NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

PAR M. GENTY.

Soient deux courbes (A) et (B) situées dans un même plan; a, a', a'', b, b', b'' les points de ces courbes situés deux par deux sur trois lignes parallèles in-



finiment voisines; s et s' les points d'intersection des droites aa' et bb', $a'a''$ et $b'b''$; α et β les angles $\widehat{ass'}$ et $\widehat{bss'}$ respectivement; ε_a, ε_b les angles de contingence, et ρ_a, ρ_b les rayons de courbure des courbes (A) et (B) aux points a et b respectivement.

Le triangle $a'ss'$ donne, aux infiniment petits près,

$$\frac{s'a'}{\sin\alpha} = \frac{ss'}{\varepsilon_a}.$$

Or

$$\varepsilon_a = \frac{aa'}{\rho_a} = \frac{\lambda . sa}{\rho_a}.$$

Donc

$$\frac{s'a'}{\sin\alpha} = \rho_a \frac{ss'}{\lambda . sa};$$

d'où l'on tire

$$\rho_a = \frac{\lambda}{ss'}\,\frac{sa.s'a'}{\sin\alpha},$$

et, à la limite,

$$\rho_a = \mu\,\frac{\overline{sa}^2}{\sin\alpha}.$$

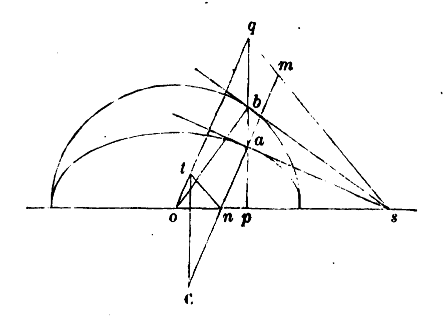
On aura de même

$$\rho_b = \mu\,\frac{\overline{sb}^2}{\sin\beta}.$$

Donc

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\overline{sa}^2\sin\beta}{\overline{sb}^2\sin\alpha}.$$

Soient, par exemple, une ellipse et le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, et considérons les points



a et *b* de ces deux courbes, situés sur une même ordonnée.

Les tangentes en *a* et *b* se rencontrent en un point *s* du grand axe, et l'on a

$$\widehat{aso} = \alpha,\quad \widehat{bso} = \beta.$$

Soit *n* le pied de la normale au point *a*; on aura

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\overline{sa}^2\sin\beta}{\overline{sb}^2\sin a} = \frac{sn\sin\beta}{so\sin\alpha},$$

et, par suite,

$$\rho_a = \frac{ob.sn.\sin\beta}{so.\sin\alpha} = \frac{sn.op}{so.\sin\alpha} = \frac{sn.oq}{so} = mn.$$

On déduit de là une construction très simple du centre de courbure au point a d'une ellipse.

QUESTIONS.

1438. La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à $l2$. (E. CESARO.)

1439. Le nombre des diviseurs de n est égal, en moyenne, à ln. (E. CESARO.)

1440. La somme des inverses des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \ldots.$$

(E. CESARO.)

1441. Soient a, b, c, ... les diviseurs de n. La somme

$$\frac{a}{p^a} + \frac{b}{p^b} + \frac{c}{p^c} + \ldots$$

est égale, en moyenne, à $\frac{1}{p-1}$.

(E. CESARO.)

1442. $f(n)$ étant la somme des restes du nombre entier n, divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim \frac{f(n)}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

(E. CESARO.)

1443. La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à αn^p. La constante α est comprise entre $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{p}+1$. Déterminer sa valeur.

(E. Cesaro.)

1444. On a

$$f(1)-f(3)+f(5)-\ldots\pm f(2n-1)$$
$$=\pm\tfrac{1}{2}f(\varepsilon+2n)+\text{const.},$$
$$f(2)-f(4)+f(6)-\ldots\pm f(2n)$$
$$=\pm\tfrac{1}{2}f(\varepsilon+2n+1)+\text{const.},$$

pourvu que l'on remplace les puissances de ε par les nombres d'Euler correspondants, définis par la relation symbolique

$$(\varepsilon+1)^p+(\varepsilon-1)^p=0,\quad (p=1,2,3,\ldots).$$

(E. Cesaro.)

1445. 1° La somme des produits m à m des n premiers nombres naturels est divisible par tous les nombres premiers compris entre $m+1$ et $n+2$, et supérieurs à $n-m$.

2° La même somme, diminuée de $1.2.3\ldots m$, est disible par $n-m$, si ce nombre est premier.

(E. Cesaro.)

1446. Les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis symboliquement par les relations

$$(B+1)^p-B^p=0,$$
$$(\varepsilon+1)^p+(\varepsilon-1)^p=0,$$

satisfont aux relations symboliques

$$(2B+1)^p=(2-2^p)B_p,$$
$$(4B+1)^p=(2-2^p)B_p-p\varepsilon_{p-1},$$
$$(4B+3)^p=(2-2^p)B_p+p\varepsilon_{p-1}.$$

(E. Cesaro.)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. WALECKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Condorcet.

La démonstration qui suit reproduit, avec quelques développements, une Note insérée aux *Comptes rendus* (19 mars 1882) : qu'il me soit permis de remercier ici M. Laguerre qui m'a indiqué une simplification notable dans le mode d'exposition.

1. A l'égard de l'élimination d'une variable, je rappelle sommairement comment on l'établit sans employer le théorème de d'Alembert.

P et Q étant deux polynômes des degrés m et n, si l'on cherche deux polynômes P' et Q' des degrés $m-1$ et $n-1$, tels que l'on ait identiquement

$$PQ' - QP' = 0, \tag{1}$$

on a, pour déterminer les $m+n$ coefficients de P' et de Q', $m+n$ équations linéaires et homogènes, dont le déterminant Δ est appelé le résultant des deux polynômes P et Q.

La condition $\Delta = 0$ est donc nécessaire et suffisante pour que les polynômes P' et Q' existent, sans être à la fois tous deux identiquement nuls.

Il est clair dès lors que Δ est nul dans chacun des trois cas suivants :

1° Quand l'un des polynômes P et Q s'évanouit;

2° Quand le terme de plus haut degré s'évanouit à la fois dans P et dans Q;

3° Quand P et Q admettent un diviseur commun, de degré au moins égal à l'unité.

Réciproquement, si Δ est nul, les polynômes P et Q présentent l'une des particularités énoncées. En effet, si l'un seul des polynômes P' et Q' s'évanouit, soit Q' par exemple, l'identité exige que Q s'évanouisse aussi, et l'on est dans le premier cas.

Si aucun des polynômes P' et Q' ne s'évanouit, ou bien les termes de plus haut degré disparaissent dans P et dans Q, et l'on est dans le second cas; ou bien le terme de plus haut degré ne disparaît pas dans l'un, P par exemple; je démontre qu'alors on est dans le troisième cas.

Je divise Q' et P' par leur plus grand commun diviseur, s'il existe; l'identité (1) devient

$$PQ_1 - QP_1 = 0, \tag{2}$$

et P_1 et Q_1 sont premiers entre eux. P_1 divise PQ_1, il est premier avec Q_1 : donc il divise P. Soit δ le quotient qui est de degré au moins égal à 1, eu égard aux degrés de P et P_1; je supprime dans (2) le facteur P_1, il reste

$$\delta Q_1 - Q = 0:$$

donc P et Q admettent le diviseur commun δ.

C. Q. F. D.

2. Pour évaluer le degré d'un déterminant D, je considère le cas où, dans chaque ligne, les degrés des éléments décroissent en progression arithmétique de raison r [1].

Je réduis chaque élément à son terme de plus haut

---

[1] Cette démonstration est tirée du cours de M. Crétin, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

degré, et je dis que le nouveau déterminant D_1 est homogène. En effet, si je multiplie dans la deuxième ligne par y^r, dans la troisième par y^{2r}, et ainsi de suite, le polynôme D_1 est multiplié par une puissance de y; d'ailleurs il est homogène, puisque chaque ligne l'est; donc il l'était avant la multiplication.

Le polynôme D_1, s'il n'est pas nul, est le terme de plus haut degré de D.

Le même énoncé subsiste si les degrés dans chaque ligne croissent en progression arithmétique.

Toute équation algébrique a une racine.

3. Je traite d'abord le cas où le degré m est impair; le théorème est déjà démontré si l'équation est réelle : je la suppose donc imaginaire. Soit $P + iQ$ son premier membre, soit $f(x) = P^2 + Q^2$. Si $f(x)$ admet une racine, cette racine ou sa conjuguée appartient à $P + iQ$: il suffit donc de démontrer que l'équation réelle $f(x)$ de degré $m = 2p$, où p est impair, admet une racine.

A cet effet, je pose $x = y + z$, et je développe $f(y + z)$ en séparant les termes de degré pair, et les termes de degré impair en z,

$$f(y+z) = \frac{f^m_{(y)}}{m!} z^m + \frac{f^{m-2}_{(y)}}{(m-2)!} z^{m-2} + \ldots + f(y)$$
$$+ z\left[\frac{f^{m-1}_{(y)}}{(m-1)!} z^{m-2} + \ldots + f'(y)\right] = \varphi(z^2) + z\psi(z^2).$$

$\varphi(z^2)$ est en z^2 de degré $\frac{m}{2}$, son premier coefficient est une constante non nulle, que je suppose égale à 1; $\psi(z^2)$ est de degré $\frac{m}{2} - 1$ en z^2.

Je cherche à déterminer y de façon que φ et ψ aient un diviseur commun en z^2. Soit $\Delta(y)$ le résultant. Δ

est en y de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ et a son premier coefficient non nul; en effet, on a

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} \frac{f^m}{m!} & \frac{f^{m-2}}{(m-2)!} & \cdots & f & 0 & . & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{f^m}{m!} & \cdots & . & f & . & \cdots & 0 \\ . & \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{f^m}{m!} & . & . & \cdots & f \\ \frac{f^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \cdots & . & f' & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & f' \end{vmatrix}.$$

Les degrés des éléments dans chaque ligne sont, par rapport à y, en progression arithmétique de raison égale à 2; tous les termes du déterminant sont donc de même degré; je cherche le degré du terme principal ou de

$$(f^m)^{\frac{m}{2}-1}(f')^{\frac{m}{2}}:$$

ce degré est égal à $\frac{m(m-1)}{2}$.

Je forme le coefficient du terme de plus haut degré dans Δ; pour cela, je réduis chaque élément à son premier coefficient, ce qui donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & C_m^2 & C_m^4 & \cdots & C_m^m & 0 & . & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & C_m^m & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . & \cdots & C_m^m \\ C_m^1 & . & \cdots & \cdots & C_m^{m-1} & 0 & . & \cdots & 0 \\ \cdots & . & \cdots & \cdots & \cdots & . & . & \cdots & . \\ 0 & . & \cdots & \cdots & \cdots & . & . & \cdots & C_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Ce coefficient n'est pas nul, car c'est l'éliminant de x^2

entre deux polynômes U et V des degrés $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2}-1$, en x^2,

$$U = \frac{1}{2}[(x+1)^m + (x-1)^m]$$

et

$$V = \frac{1}{2x}[(x+1)^m - (x-1)^m],$$

dont les degrés sont effectivement $\frac{m}{2}$ et $\frac{m}{2}-1$, et qui n'admettent pas de diviseur commun, car un tel diviseur serait commun à $U + Vx$ et à $U - Vx$, c'est-à-dire à $(x+1)^m$ et à $(x-1)^m$, qui sont premiers entre eux.

Il résulte de ce qui précède que $\Delta(y)$, polynôme réel dont le degré est le nombre impair $\frac{m(m-1)}{2}$, admet une racine réelle. Pour cette valeur de y, ou bien ψ s'évanouit, ou bien φ et ψ ont un diviseur commun.

Dans le premier cas, $f(x)$ se réduit à $\varphi(z^2)$, qui est à coefficients réels et de degré impair en z^2; $\varphi(z^2)$ admet donc un diviseur réel du premier degré en z^2, et un diviseur du second degré en x, et, par suite, une racine.

Dans le second cas, où φ et ψ admettent un diviseur commun $\delta(z^2)$ dont le degré en z^2 est au moins 1, au plus $\frac{m}{2}-1$, $f(x)$ est décomposé en un produit de deux facteurs de degrés moindres que m.

Si l'un de ces facteurs est de degré impair, il admet un diviseur réel du premier degré qui divise $f(x)$, sinon l'un des facteurs $f_1(x)$ est de degré $2p'$, p' étant un nombre impair, inférieur à p. Opérant sur $f_1(x)$ comme sur $f(x)$, on forme une suite limitée de diviseurs de $f(x)$ dont le dernier est ou de degré impair, ou de degré 2. Il admet une racine qui appartient à f, ce qui démontre le théorème.

Je considère maintenant une équation à coefficients

réels ou imaginaires de degré m égal à $2^i p$, p étant impair. Pour abréger, je dirai que le nombre m est de parité i, et je vais démontrer que, si le théorème est établi pour les équations de parité inférieure à i, il est encore vrai pour une équation de parité i; il sera, dès lors, établi dans toute sa généralité, puisqu'il est vrai pour la parité 0.

Soit $f(x)$ le premier membre de l'équation; je pose, comme ci-dessus,

$$x = y + z \quad \text{et} \quad f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2).$$

L'éliminant de z^2 entre φ et ψ est en y de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ et de parité $(i-1)$; il s'annule donc pour une valeur réelle ou imaginaire de y.

En remarquant que $\varphi(z^2)$ est en z^2 de parité $(i-1)$, on prouvera, comme plus haut, que $f(x)$ admet un diviseur du second degré en x, ou un diviseur de parité moindre que i, et par suite une racine, ou enfin un diviseur de degré moindre que m et de parité i. Opérant sur ce diviseur comme sur $f(x)$, on forme une suite de diviseurs de $f(x)$, qui sont en nombre fini, puisque leurs degrés décroissent, et le dernier est de parité moindre que i, ou admet une racine, ce qu'il fallait démontrer.

4. La résolvante employée est l'équation aux demi-sommes des racines deux à deux.

A ce point de vue, la démonstration qui précède est très voisine de celle que Lagrange, sous le nom de Foncenex, a donnée en 1759 [1].

Lagrange classe, comme l'avait fait Euler, les équa-

---

[1] Voir LAGRANGE, *Équations numériques*, Notes IX et X.

tions d'après la parité de leur degré, puis il ramène la recherche d'un diviseur du second degré à la résolution de l'équation aux sommes des racines deux à deux.

La démonstration de Lagrange est insuffisante. De son temps, la question était mal posée, et la théorie des imaginaires n'était pas arrêtée comme elle l'est aujourd'hui. On savait qu'une équation de degré m peut être choisie de façon à avoir m racines réelles et à les conserver réelles pour une variation convenablement limitée des coefficients. On regardait ces racines comme pouvant être exprimées par des fonctions analytiques des coefficients, et ces fonctions étaient supposées vérifier encore l'équation, quand cette dernière cessait d'avoir toutes ses racines réelles. On appelait *impossibles* les racines ainsi dénaturées, et l'on se proposait de montrer qu'elles étaient de la forme $p + qi$. C'est ainsi que d'Alembert prend une racine réelle développée en série et cherche ce que devient ce développement quand la racine cesse d'être réelle. De même, Euler, Lagrange et Laplace admettent que les racines existent sous une forme qui les soumet au calcul algébrique, ce qui rend leurs démonstrations illusoires.

Gauss (¹) (1799) condamne la conception des racines *impossibles* et propose quatre démonstrations. La première (1799), qu'il reproduira sous une forme peu différente (1849), est fondée sur des considérations de Géométrie de situation. La quatrième (1816) appartient au Calcul intégral. La deuxième (1815) seule est purement algébrique, mais elle est très compliquée par la nature et le procédé de formation de la résolvante.

Je passe sous silence d'autres démonstrations qui emploient la notion de continuité ailleurs que pour l'équa-

---

(¹) GAUSS, *Werke*, t. III.

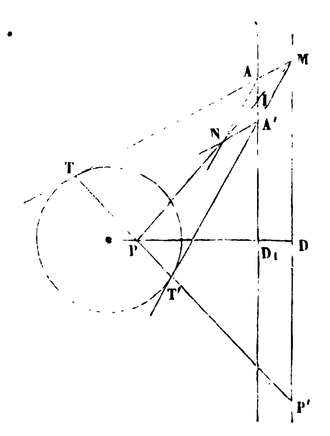
tion réelle de degré impair, et je mentionne enfin la démonstration de M. Gordan (*Mathematische Annalen*, 1876). M. Gordan rattache sa démonstration à celle de Gauss. La résolvante qu'il emploie est l'équation aux carrés des demi-différences. Cette résolvante se présente moins simplement que l'équation aux demi-sommes, et le degré n'y est pas aussi facile à reconnaître.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. COLIN,
Élève du lycée Condorcet.

Dans sa théorie des cycles, M. Laguerre démontre [1] le théorème suivant :

Étant donnés le cercle O *et deux droites parallèles*



D *et* D_1, *d'un point* M *de* D *on mène les tangentes* MT,

---

([1]) *Nouvelles Annales*, décembre 1882.

MT′ *au cercle; par le point* A *où l'une rencontre* D_1, *on mène la parallèle à l'autre. La droite ainsi obtenue enveloppe un cercle.*

Voici une autre démonstration du même théorème.

Soient N le point de rencontre des parallèles aux deux tangentes, P le pôle de D; je dis que M, N, P sont en ligne droite. D'abord, MN passe par le milieu I de AA′. dans le parallélogramme MAA′N. De plus, si l'on prolonge TT′ jusqu'à sa rencontre en P′ avec la droite D, le faisceau (M, TT′PP′) est harmonique, et MP partage en parties égales la parallèle D_1 à sa conjuguée; MP passe donc en I comme MN.

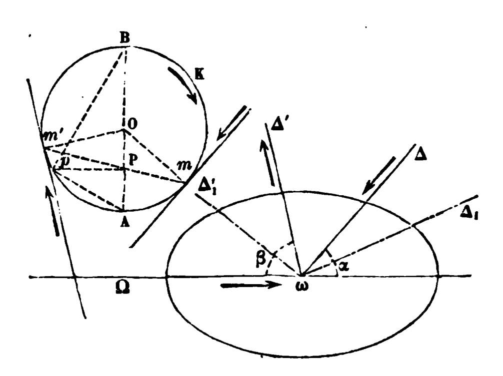
D'ailleurs, le rapport $\frac{PN}{PM}$ est constant et égal à $\frac{2d_1-d}{d}$, d et d_1 étant les abscisses OD et OD_1; donc AN et A′N enveloppent un cercle homothétique du cercle O. P est le centre d'homothétie.

NOTE SUR LA TRANSFORMATION PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Considérons un couple de semi-droites réciproques Δ et Δ′ se coupant en un point ω de l'axe de transformation Ω. Soit C une conique de centre ω, ayant son grand axe dirigé suivant Ω, et telle que le rapport $\frac{b^2}{a^2}$ des carrés de ses demi-axes soit égal au rapport $\frac{PA}{PB}$ des distances du

pôle P aux extrémités du diamètre AB du cycle K, qui passe par ce point; si Pp est perpendiculaire à AB,



$\frac{b}{a} = \frac{pA}{pB}$. La conique C sera une ellipse ou une hyperbole, selon que le pôle P sera intérieur ou extérieur au cycle K.

Prenons la bissectrice Δ_1 des semi-droites Δ et Ω, et la bissectrice Δ'_1 des semi-droites Δ' et Ω.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les semi-droites* Δ_1 *et* Δ'_1 *forment un couple de diamètres conjugués de la conique* C.

Menons, en effet, au cycle K les tangentes parallèles aux semi-droites réciproques Δ et Δ'; tirons la corde des contacts mm' et les rayons Om et Om'. Nous avons

$$\widehat{AOm} = \alpha, \quad \widehat{AOm'} = \beta$$

et, par suite,

$$Pm = \frac{r \sin \alpha}{\sin P}, \quad Pm' = \frac{r \sin \beta}{\sin P}.$$

Donc

$$Pm.Pm' = \frac{r^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 P},$$

ou

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 P} = \frac{Pm.Pm'}{r^2}.$$

Or, d'après une propriété bien connue du cercle,

$$\mathrm{P}m.\mathrm{P}m' = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB};$$

d'ailleurs

$$\hat{\mathrm{P}} = \frac{\pi - (\beta - \alpha)}{2}.$$

L'égalité précédente pourra donc s'écrire

$$\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{\mathrm{PA}.\mathrm{PB}}{r^2},$$

ou

$$\frac{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{\mathrm{PA}.\mathrm{PB}}{r^2},$$

ou encore

$$1 - \frac{\cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{\mathrm{PA}.\mathrm{PB}}{r^2}.$$

Nous tirons de là

$$\frac{\cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = 1 - \frac{\mathrm{PA}.\mathrm{PB}}{r^2} = \frac{r^2 - \mathrm{PA}.\mathrm{PB}}{r^2} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{r^2},$$

ou

$$\frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{\mathrm{OP}}{r}.$$

Par suite,

$$\frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2} + \cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = \frac{r - \mathrm{OP}}{r + \mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}},$$

ou, après une transformation bien simple,

$$\tang \frac{\alpha}{2} \tang \frac{\beta}{2} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

On aura donc aussi

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{b^2}{a^2},$$

ce qui démontre le théorème.

Les asymptotes de la conique C seront, d'après ce qui précède, les bissectrices des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes et de l'axe Ω.

La conique C est *caractéristique* de la transformation. Elle peut, à elle seule, la définir.

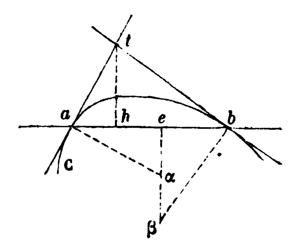
Nous pourrons dès lors énoncer le théorème précédent de la manière suivante :

Deux semi-droites réciproques quelconques sont anti-symétriques de l'axe de transformation par rapport à deux diamètres conjugués de la conique caractéristique.

SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient, dans un plan, C une courbe fixe quelconque, ab une droite mobile coupant cette courbe aux



points a et b; les tangentes à la courbe C aux points a

et b se coupent au point t; la droite ab touche son enveloppe au point e; la droite $e\alpha\beta$ normale à cette enveloppe coupe en α et β les normales $a\alpha$ et $b\beta$ à la courbe C.

L'objet de la présente Note est la détermination du point e, lorsque la droite mobile est assujettie à certaines conditions remarquables.

Le segment de droite ab est de longueur constante.

2. On sait que, dans ce cas, rappelé ici à simple titre de mémoire, *le point e s'obtient en abaissant du point de rencontre de* $a\alpha$ *et* $b\beta$ *une perpendiculaire sur* ab. C'est une des propriétés fondamentales du centre instantané de rotation.

3. Si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de ab est une *épicycloïde à quatre points de rebroussement* (1).

L'arc ab est de longueur constante.

4. Représentant par $d(a)$ et $d(b)$ les arcs infiniment petits correspondants décrits par les points a et b sur la courbe C, nous avons, en vertu d'un théorème connu,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be},$$

et comme, dans ce cas, $d(a) = d(b)$,

$$\frac{ae}{be} = \frac{bt}{at},$$

d'où l'on conclut, pour la détermination du point e :

---

(1) M. Mannheim a publié, dans les *Nouvelles Annales*, une étude géométrique de cette courbe (2e série, t. XVII, p. 321).

Théorème. — *Si t' est le symétrique du point t par rapport au milieu du segment ab, le point e se trouve sur la bissectrice de l'angle $at'b$.*

5. J'ai démontré ailleurs (¹), par la simple Géométrie, que si, dans ce cas, la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de la droite ab est une *parabole* tangente à ces deux droites et ayant pour axe leur bissectrice.

La somme de l'arc ab et du segment ab est constante.

6. On a, dans ce cas,

$$d(ab) + d(\text{arc}\, ab) = 0,$$

ou

$$d(ab) + d(b) - d(a) = 0.$$

Or

$$d(a) = d(b)\frac{ae.at}{be.bt},$$

et, en appelant $d\omega$ l'angle de deux positions infiniment voisines de ab,

$$d(ab) = \alpha\beta.d\omega,$$

ou, puisque, d'après un théorème connu, $d\omega = \frac{d(a)}{a\alpha}$,

$$d(ab) = \alpha\beta\cdot\frac{d(a)}{a\alpha} = \alpha\beta.d(b)\frac{ae.at}{be.bt}\,\frac{\sin tab}{ae}$$
$$= d(b)\frac{\alpha\beta.at}{be.bt}\sin tab.$$

L'équation différentielle écrite plus haut devient donc

$$d(b)\frac{\alpha\beta.at}{be.bt}\sin tab + d(b) - d(b)\frac{ae.at}{be.bt} = 0,$$

ou

$$\alpha\beta.at\sin tab + be.bt - ae.at = 0,$$

(¹) *Journ. de Math. élém.*, t. IV, p. 160.

ou encore

$$\alpha\beta.th + be.bt - ae.at = 0.$$

Si l'on remarque que

$$\alpha\beta = be.\cot tba - ae.\cot tab,$$

l'équation précédente devient

$$be(th.\cot tba + bt) - ae(th \cot tab + at) = 0,$$

ou

$$\frac{be}{ae} = \frac{ah + at}{bh + bt}.$$

Cette expression permettrait de construire le point e, mais nous allons la transformer. En effet, elle peut s'écrire

$$\frac{be}{ae} = \frac{at(1 + \cos tab)}{bt(1 + \cos tba)} = \frac{at.\cos^2 \frac{tab}{2}}{bt.\cos^2 \frac{tba}{2}};$$

d'ailleurs

$$\frac{at}{bt} = \frac{\sin tba}{\sin tab} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2}};$$

donc

$$\frac{be}{ae} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2} \cos^2 \frac{tab}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2} \cos^2 \frac{tba}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{tba}{2}}{\operatorname{tang} \frac{tab}{2}},$$

expression qui se traduit immédiatement par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Le point e est le point de contact sur ab du cercle exinscrit au triangle atb, situé dans l'angle atb.*

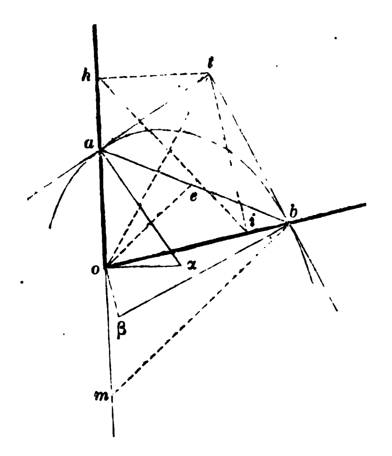
7. Il résulte de là que, si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de *ab* est un *cercle* tangent à ces deux droites.

LE SEGMENT ab EST VU D'UN POINT FIXE SOUS UN ANGLE CONSTANT.

8. Soit o le point fixe. Nous avons

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{be.bt}.$$

La normale $a\alpha$ coupe en α la perpendiculaire $o\alpha$ à oa, c'est-à-dire la normale à l'enveloppe de oa, puisque cette



droite tourne autour du point o. De même, la normale $b\beta$ coupe en β la perpendiculaire $o\beta$ à ob; et l'on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Par suite

$$\frac{at.ae}{bt.be} = \frac{a\alpha}{b\beta}$$

et

$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha}{at}\,\frac{bt}{b\beta}.$$

Abaissons du point de rencontre t des tangentes les perpendiculaires th et ti sur ao et bo; les triangles $ao\alpha$ et tha sont semblables, ainsi que $bo\beta$ et tib; donc

$$\frac{a\alpha}{at} = \frac{ao}{th}, \quad \frac{bt}{b\beta} = \frac{ti}{bo},$$

et, par suite,

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao.ti}{th.bo}.$$

Tirons bm parallèle à oe; nous avons

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao}{mo};$$

donc

$$\frac{ao}{mo} = \frac{ao.ti}{th.bo},$$

ou

$$\frac{bo}{mo} = \frac{ti}{th},$$

égalité qui fait voir, en remarquant que les angles $\widehat{hti}$ et $\widehat{bom}$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, que les triangles thi et omb sont semblables; et comme les côtés homologues th et mo, d'une part, ti et bo, de l'autre, sont perpendiculaires, il en résulte que hi est perpendiculaire à mb et, par suite, à oe.

On aura donc le point e cherché, *en projetant le point de rencontre t des tangentes en h et en i sur les côtés oa et ob de l'angle constant et en abaissant du point o une perpendiculaire sur la droite hi.*

Mais cette construction peut être simplifiée. En effet, tirons la droite ot; le quadrilatère $ohti$ est inscriptible, puisque ses angles en h et en i sont droits; par suite, $\widehat{hot} = \widehat{hit}$; mais $\widehat{hit} = \widehat{ioe}$, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc $\widehat{hot} = \widehat{hit}$.

On aura donc encore le point e, *en faisant l'angle* $\widehat{boe}$ *égal à l'angle* $\widehat{toa}$.

9. Application. — *Dans une ellipse, une corde ab est constamment vue du centre o sous un angle droit; quelle est l'enveloppe de cette corde?*

La droite ot coupe ab en son milieu; elle est donc médiane du triangle aob, et, comme ce triangle est rectangle en o, $\widehat{toa} = \widehat{bao}$; si e est le point où ab touche son enveloppe, on a, d'après ce qui précède, $\widehat{aoe} = \widehat{toa}$; donc $\widehat{aoe} = \widehat{bao}$; et, comme ob est perpendiculaire à oa, oe sera perpendiculaire à ab; la normale oe à l'enveloppe de ab passant par le point fixe o, cette enveloppe est un cercle ayant ce point pour centre.

Les tangentes a l'extrémité de l'arc ab font entre elles un angle constant.

10. On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{bc.bt}.$$

D'ailleurs, si R et R' sont les rayons de courbure en a et b, $d\theta$ et $d\theta'$ les angles de contingence en ces points, on a

$$d(a) = \mathrm{R}\,d\theta, \quad d(b) = \mathrm{R}'\,d\theta'.$$

Mais, puisque $\widehat{atb}$ est constant, $d\theta = d\theta'$: donc

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'};$$

par suite,

$$\frac{ae.at}{be.bt} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.$$

Appelons α et β les centres de courbure en a et b, o un point tel que les rayons $a\alpha$ et $b\beta$ soient vus de ce point sous des angles droits; nous retomberons alors sur la même figure que pour la question précédente, avec les mêmes relations, et nous arriverons, par conséquent, au même résultat.

Donc, le point o étant défini ainsi qu'il vient d'être dit, on aura le point e où ab touche son enveloppe *en faisant* $\widehat{aoe} = \widehat{tob}$.

Dans le cas particulier des coniques, ce problème donne lieu à un théorème plus intéressant, qui rentre dans le cadre d'un travail plus étendu que nous publierons prochainement dans les *Nouvelles Annales*.

RECHERCHE D'UNE COURBE PLANE POSSÉDANT UN LIEU GÉOMÉTRIQUE DE POLES PRINCIPAUX D'INVERSION;

PAR M. G. FOURET,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

On sait qu'il est possible, d'une infinité de manières, de transformer en elle-même par *inversion* une circonférence de cercle, en prenant comme pôles de transformation les divers points du plan de cette circonférence. On peut énoncer cette propriété en disant que la circonférence de cercle a pour *pôles principaux d'inversion* tous les points de son plan.

Il existe, d'autre part, des courbes planes appelées *anallagmatiques*, qui ont la propriété de se transformer en elles-mêmes par inversion, à l'aide d'un ou de plusieurs points de leur plan pris pour pôles de transfor-

mation. Les plus remarquables dans ce genre sont les *anallagmatiques* des troisième et quatrième ordres, qui possèdent, en général, quatre pôles principaux d'inversion. Il existe même des anallagmatiques planes qui ont une infinité de pôles principaux d'inversion distribués le long d'une certaine ligne : on obtient une pareille courbe en transformant par rayons vecteurs réciproques une courbe douée d'une infinité d'axes de symétrie.

N'y aurait-il pas, tenant le milieu entre le cercle et les courbes que nous venons de rappeler, une catégorie d'anallagmatiques planes possédant une infinité de pôles principaux d'inversion qui se succéderaient d'une manière continue, de manière à avoir pour lieu géométrique une ligne droite ou courbe. Telle est la question que nous allons résoudre. Nous nous appuierons, pour cela, sur une propriété bien connue de l'inversion, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

En deux points correspondants de deux branches de courbes inverses, les tangentes à ces branches de courbes font avec le rayon vecteur commun qui aboutit au pôle d'inversion des angles correspondants [1] *supplémentaires.*

Supposons qu'il existe une courbe plane anallagmatique (C) douée d'une infinité de pôles principaux d'inversion formant un lieu géométrique (L) [2]. Soit O un point pris arbitrairement sur (C). Par O faisons passer une droite quelconque rencontrant (L) en P. Ce point P étant, par hypothèse, un pôle principal d'inversion de (C), il existe, à l'intersection de PO et de (C), un se-

---

[1] L'expression d'*angle correspondant* a ici le même sens qu'en Géométrie élémentaire.

[2] Le lecteur est prié de faire la figure.

cond point M inverse de O par rapport à P, et tel, par suite de la propriété rappelée plus haut, que les angles *correspondants* formés par le rayon vecteur PO avec les tangentes à (C) en O et en M soient supplémentaires.

Cela posé, rapportons la courbe (C) à un système de coordonnées polaires ayant pour pôle le point O, et pour axe polaire la tangente OX en ce point à la courbe (C).

Posons

$$\text{OM} = \rho \quad \text{et} \quad \widehat{\text{MOX}} = \omega.$$

En vertu de la remarque précédente, il y a égalité entre l'angle ω et l'angle V formé par le prolongement du rayon vecteur OM avec la tangente MT à (C), dirigée dans le sens où ω croît. Or, d'après une formule bien connue, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'_\omega}.$$

Par suite

$$\frac{\rho'_\omega}{\rho} = \frac{1}{\operatorname{tang}\omega},$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\rho = a \sin\omega,$$

a étant une constante arbitraire.

L'équation ainsi trouvée est celle d'une circonférence tangente en O à l'axe polaire OX. Quant au lieu (L), il reste indéterminé, ou, autrement dit, il comprend tous les points du plan. Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes :

1° *Il n'existe pas de courbe anallagmatique plane qui possède une infinité de pôles principaux d'inversion ayant pour lieu géométrique une ligne droite ou courbe.*

2° *La circonférence de cercle est la seule courbe*

plane qui se transforme en elle-même par inversion, à l'aide d'un point quelconque de son plan pris pour pôle de transformation.

En remarquant que la sphère est la seule surface dont toutes les sections planes soient des circonférences, on déduit de ce qui précède les résultats suivants :

3° *Il n'existe pas de surface anallagmatique qui possède une infinité de pôles principaux d'inversion ayant pour lieu géométrique une surface.*

4° *La sphère est la seule surface qui se transforme en elle-même par inversion, quel que soit le point que l'on prenne pour pôle de transformation.*

Il est bon de remarquer qu'il existe des surfaces anallagmatiques dont les pôles principaux en nombre infini ont pour lieu géométrique une ligne droite ou courbe. Deux surfaces bien connues sont dans ce cas : le tore a pour pôles principaux d'inversion tous les points de son axe; la cyclide de Dupin a pour pôles principaux d'inversion tous les points d'une certaine circonférence.

SUR QUELQUES IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. G. FOURET,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

En désignant par a, b, c trois angles quelconques, on a identiquement

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin(b-c)}{\sin a} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} \\ &\qquad + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a \sin b \sin c} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette relation est déjà connue : elle est comprise dans l'énoncé de la question 681 (2e série, t. II, p. 523), comme s'appliquant aux trois angles d'un triangle rectiligne. La démonstration qui en a été donnée (2e série, t. III, p. 72) l'a étendue à trois angles quelconques. De cette identité nous allons déduire, par quelques transformations fort simples, d'autres identités qui nous ont paru, pour la plupart, nouvelles et dignes d'être notées.

Nous commencerons par donner de la relation (1) une démonstration plus élémentaire et plus simple que celle qui a été publiée dans ce Recueil, en nous servant uniquement de la formule qui sert à transformer une différence de cosinus en un produit de sinus, et réciproquement.

On a d'abord

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}\\
&=\frac{\sin b\sin(b-c)+\sin a\sin(c-a)}{\sin a\sin b}\\
&=\frac{\cos c-\cos(2b-c)+\cos(2a-c)-\cos c}{2\sin a\sin b}\\
&=\frac{\sin(a+b-c)\sin(b-a)}{\sin a\sin b};
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}+\frac{\sin(a-b)}{\sin c}\\
&=\frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b\sin c}[\sin a\sin b-\sin(a+b-c)\sin c]\\
&=\frac{\sin(a-b)}{2\sin a\sin b\sin c}[\cos(a-b)-\cos(a+b)\\
&\qquad-\cos(a+b-2c)+\cos(a+b)]\\
&=\frac{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}{\sin a\sin b\sin c}.
\end{aligned}$$

D'où l'on conclut la relation (1), en faisant passer tous les termes dans un même membre.

Pour abréger l'écriture, désignons d'une manière générale par $\sum \varphi(a, b, c)$ la somme des trois valeurs que prend une fonction trigonométrique $\varphi(a, b, c)$ des trois angles a, b, c, quand on les permute circulairement. Moyennant cette convention, la relation (1) peut s'écrire

$$(1)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\sin a} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a \sin b \sin c} = 0.$$

En appliquant la même relation aux trois angles $a+h$, $b+h$, $c+h$, h étant quelconque, on obtient

$$(2)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\sin(a+h)} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin(a+h)\sin(b+h)\sin(c+h)} = 0,$$

d'où, en faisant $h = \frac{\pi}{2}$,

$$(3)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\cos a} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\cos a \cos b \cos c} = 0.$$

Dans (1) et (3) remplaçons a, b, c respectivement par α, β, γ, et faisons ensuite $\alpha = b + c$, $\beta = c + a$, $\gamma = a + b$; il vient

$$(4)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin(b+c)\sin(c+a)\sin(a+b)} = 0,$$

$$(5)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\cos(b+c)} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\cos(b+c)\cos(c+a)\cos(a+b)} = 0.$$

En différentiant (2) par rapport à h, on obtient, toute réduction faite,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{\cos(a+h)\sin^2(b+h)\sin^2(c+h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} \\ &\quad = \cos(a+h)\cos(b+h)\cos(c+h) - \cos(a+b+c+3h). \end{aligned} \right.$$

Cette relation a lieu quel que soit h. En y faisant successivement $h = 0$ et $h = \frac{\pi}{2}$, on en conclut les deux sui-

vantes :

$$(7)\sum\frac{\cos a\sin^2 b\sin^2 c}{\sin(a-b)\sin(a-c)} = \cos a\cos b\cos c - \cos(a+b+c),$$

$$(8)\sum\frac{\sin a\cos^2 b\cos^2 c}{\sin(a-b)\sin(a-c)} = \sin a\sin b\sin c + \sin(a+b+c).$$

En différentiant par rapport à h la relation (6), on obtiendrait une nouvelle identité, que l'on pourrait particulariser en faisant $h=0$ et $h=\frac{\pi}{2}$. Mais les résultats auxquels on arrive ainsi ne sont pas assez simples pour mériter d'être énoncés.

Des relations (1) et (3) nous pouvons encore déduire une relation fort simple et d'ailleurs connue, en les ajoutant membre à membre, après avoir chassé les dénominateurs. On obtient ainsi

$$\sum\sin(b-c)\cos(b-c)$$
$$+ 2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b) = 0,$$

ce qui peut s'écrire, α, β, γ désignant trois angles dont la somme est nulle,

$$(9)\qquad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 0.$$

Cette dernière relation n'est qu'un cas particulier d'une autre beaucoup plus générale, dont nous aurons peut-être l'occasion de nous occuper dans une prochaine Note.

SUR LE DISCRIMINANT DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. WEILL.

Étant donnée une équation complète du quatrième degré, on peut, par une transformation connue, la ra-

mener à la forme

$$x^4 + 6ax^2 + bx + c = 0.$$

Changeons x en $x + \sqrt{-a}$, l'équation devient

$$x^4 + 4x^3\sqrt{-a} + x(b + 8a\sqrt{-a}) + c - 5a^2 + b\sqrt{-a} = 0.$$

Cela posé, considérons les deux coniques

$$x^2 = y,$$
$$y^2 + 4xy\sqrt{-a} + \ldots = 0.$$

L'équation en λ de ces deux coniques est

$$0 = \lambda^3 + 4\lambda\left[\sqrt{-a}(b + 8a\sqrt{-a}) - (c - 5a^2 + b\sqrt{-a})\right] + (b + 8a\sqrt{-a})^2 - 16a(c - 5a^2 + b\sqrt{-a}).$$

En exprimant que cette équation a une racine double, nous aurons écrit la condition pour que l'équation du quatrième degré ait elle-même une racine double. Cette condition est donc

$$\left[\frac{2}{3}(3a^2 + c)\right]^3 - \left(\frac{b^2 + 16a^3 - 16ac}{2}\right)^2 = 0.$$

Les deux conditions pour que l'équation ait une racine triple sont alors

$$3a^2 + c = 0,$$
$$b^2 + 16a^3 - 16ac = 0.$$

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE [1];

PAR M. ERNEST CESARO.

Le théorème énoncé s'applique seulement au cas de ρ *constant*. Dans le cas de ρ *variable*, les conditions (2)

---

[1] Voir *Mathesis*, avril 1883.

deviennent

$$\begin{cases} B(Cx - Az) = 0, & AB = 0, \\ A(Bz - Cy) = 0, & \\ A(Cx - Az) + B(Bz - Cy) = 0, & A^2 = 1; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad z = 0.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Parmi toutes les droites, invariablement liées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale, en un point d'une ligne à courbures variables, il n'y a que la tangente, et les parallèles à la tangente situées dans le plan rectifiant, qui engendrent des surfaces développables.*

SUR LE COMPLEXE FORMÉ PAR LES AXES D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. G. KŒNIGS.

I. M. Reye a appelé *axe d'une surface* S^2 *du second ordre* toute droite normale au plan polaire d'un de ses points. Les surfaces homothétiques et concentriques à S^2 forment un faisceau $F(\Sigma^2)$ de surfaces circonscrites à S^2 suivant sa trace c_∞^2 sur le plan de l'infini. Les axes de S^2 sont communs à toutes les surfaces du faisceau, et sur tout axe il existe un point M dont les plans polaires par rapport aux surfaces du faisceau sont normaux à cet axe; en particulier, la surface unique du système qui passe au point M y coupe l'axe normalement : donc le complexe des axes est aussi celui des normales aux surfaces du faisceau $F(\Sigma^2)$.

Par tout point de l'espace passe une surface unique du faisceau; nous dirons que ce point est le *point de départ* de la normale à cette surface.

II. Si nous prenons pour équation de la quadrique S^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

une droite quelconque du complexe des axes, ayant $M(x, y, z)$ pour point de départ, sera représentée par les équations

$$\left(\frac{X}{x}-1\right)a^2=\left(\frac{Y}{y}-1\right)b^2=\left(\frac{Z}{z}-1\right)c^2.$$

L'équation suivante

$$A\alpha+B\beta+C+Pq-Qp-R(\alpha q-\beta p)=0$$

exprime que la droite $(x=\alpha z+p,\ y=\beta z+q)$ fait partie d'un complexe linéaire : si l'on calcule les quantités α, β, p, q, $\alpha q-\beta p$ relatives à l'axe considéré, et qu'on les porte dans l'équation du complexe, on trouve

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=A\frac{x}{a^2}+B\frac{y}{b^2}+C\frac{z}{c^2}+P\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}yz&\\ +Q\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}zx+R\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}xy&=0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, pour que six points $M_1, M_2, \ldots, M_6$, de coordonnées

$$(x_1,y_1,z_1),\quad (x_2,y_2,z_2),\quad \ldots,\quad (x_6,y_6,z_6),$$

soient les points de départ de six axes appartenant à un même complexe linéaire, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer les quantités A, B, C, P, Q, R, ou plutôt leurs rapports, de sorte que les équations suivantes soient simultanément possibles :

$$\varphi(x_1,y_1,z_1)=0,\quad \varphi(x_2,y_2,z_2)=0,\quad \ldots,\quad \varphi(x_6,y_6,z_6)=0.$$

Mais $\varphi(x, y, z) = 0$ est l'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre principal commun à toutes les quadriques du faisceau $F(S^2)$; nous avons donc démontré ce théorème :

Pour que six axes d'une surface du second ordre appartiennent à un même complexe linéaire, il faut et il suffit que leurs six points de départ soient sur une même surface du second ordre circonscrite au tétraèdre principal de la surface.

Pour que cinq droites appartiennent à une congruence linéaire, il faut et il suffit qu'elles appartiennent à deux complexes linéaires : dans le cas des axes, il est donc nécessaire et suffisant que leurs points de départ appartiennent à deux quadriques circonscrites au tétraèdre principal; donc :

Pour que cinq axes d'une surface du second ordre appartiennent à une même congruence linéaire, il faut et il suffit que leurs cinq points de départ et les sommets du tétraèdre principal soient neuf points d'une même biquadratique.

Pour que quatre droites appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit qu'elles appartiennent à trois complexes linéaires; dans le cas des axes, il est donc nécessaire et suffisant que leurs points de départ appartiennent à trois quadriques circonscrites au tétraèdre principal; de là ce théorème :

Pour que quatre axes d'une quadrique appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit que leurs quatre points de départ et les sommets du tétraèdre principal soient huit points formant la base d'un faisceau de biquadratiques.

On sait que, si huit points forment la base d'un faisceau de biquadratiques, en les séparant arbitrairement en deux tétraèdres, il est possible de trouver une quadrique conjuguée à ces deux tétraèdres, et réciproquement, que si deux tétraèdres sont conjugués par rapport à une même quadrique, toute biquadratique passant par sept de leurs sommets ira passer par le huitième. On peut donc donner au théorème ci-dessus la forme suivante :

Pour que quatre axes d'une quadrique appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit que le tétraèdre formé par leurs points de départ soit conjugué par rapport à une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la proposée.

On peut remarquer que, si l'on prend quatre points sur une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal, les axes dont ils sont les points de départ sont sur un même hyperboloïde. En effet, huit points quelconques d'une cubique gauche peuvent être considérés comme formant la base d'un faisceau de biquadratiques (P. Serret, *Géométrie de direction*). On en déduit le théorème suivant :

Si un point décrit une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal, l'axe dont il est le point de départ décrit un hyperboloïde.

Parmi les cubiques gauches circonscrites au tétraèdre principal et qui sont en nombre quadruplement infini, il en existe qui forment seulement une série triplement infinie; ce sont celles qui sont tangentes à un axe en un point différent d'un sommet du tétraèdre principal.

Dans un pareil cas, en appelant M le point de contact de la cubique avec l'axe qui la touche, l'hyperboloïde

se réduit à un cône dont M est le sommet, et l'on retrouve ainsi le cône découvert par Terquem. Ce cône est précisément celui du complexe qui est relatif au point M. On est donc ramené à des propriétés connues.

III. Actuellement introduisons dans les théorèmes cidessus l'hypothèse que les points de départ sont pris sur une même surface du faisceau $F(\Sigma^2)$, par exemple sur S^2 : nous obtenons des propriétés des normales à une même quadrique.

Le premier théorème montre que :

Sur toute quadrique, il existe un système quintuplement indéterminé de biquadratiques; les normales à la surface en tous les points d'une de ces biquadratiques font partie d'un même complexe linéaire.

Un cas particulier a été étudié par Chasles : c'est celui où le complexe linéaire est formé de droites en rencontrant une autre fixe. Il existe alors la relation

$$AP + BQ + CR = 0$$

entre les arbitraires de l'équation (1), qui ne représente plus qu'une série quadruplement indéterminée de quadriques circonscrites au tétraèdre principal. Ainsi :

Sur toute quadrique, il existe un système quadruplement indéterminé de biquadratiques; les normales en tous les points d'une de ces biquadratiques rencontrent une droite fixe.

Les biquadratiques que nous venons de définir jouissent d'une propriété exclusive que voici :

Les points d'une quelconque de ces biquadratiques se distribuent en groupes de six : les normales en six points d'un même groupe concourent, et le lieu de ces points

de concours est une droite. (C'est précisément la droite ci-dessus.)

M. Desboves a donné un nom à cette droite, dans le cas particulier où la biquadratique se compose de deux coniques : il l'appelle la *synnormale*.

En continuant l'application des théorèmes ci-dessus aux propriétés des normales, on voit que :

Les biquadratiques circonscrites au tétraèdre principal d'une quadrique la percent chacune en huit points : les normales en huit points d'un même groupe rencontrent deux mêmes droites.

Les cubiques gauches circonscrites au tétraèdre principal d'une quadrique la percent chacune en six points : les normales en six points d'un même groupe appartiennent à un même hyperboloïde.

Pour que les normales en quatre points d'une quadrique appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit que le tétraèdre formé par ces quatre points soit conjugué par rapport à une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la proposée.

RECHERCHE DES CERCLES COUPANT TROIS CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DÉTERMINÉS;

PAR M. E.-M. LAQUIÈRE.

La lecture des formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique exposées par M. Lucas (*Nouv. Ann.*, 2ᵉ série, t. XV, p. 501) nous remet en mémoire une formule que nous possédons depuis une quinzaine d'années environ, représentant l'équation de l'en-

semble des huit cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles déterminés.

La détermination d'un tel cercle nous avait vivement préoccupé à cette époque; nous en possédions plusieurs solutions, les unes géométriques, d'autres analytiques; enfin notre ami, M. Halphen, alors au début de sa carrière scientifique, avait ajouté à ce nombre une solution analytique des plus élégantes, dont nous regrettons la perte parmi la plupart de nos notes égarées pendant le siège de Strasbourg.

Nous ne donnerons ici que l'une des solutions géométriques, absolument élémentaire [1], et nous la ferons suivre de la formule dont nous venons de parler.

Les théorèmes suivants sont évidents sur simple énoncé :

I. *Les deux cercles* C, C′ *passant par les points d'intersection de deux cercles* C_1, C_2 *et ayant leur centre en l'un des centres de similitude* S, S′ *de ces derniers sont bissecteurs de leur angle (réel ou imaginaire) d'intersection.*

II. *Les deux cercles se coupent entre eux à angle droit. Le rayon de chacun est la racine carrée de la puissance composée des deux cercles par rapport au centre de similitude qui lui sert de centre.*

III. *Un cercle, dont la corde d'intersections alternée avec l'un et l'autre cercle passe au centre de similitude des points d'intersections, est isogonal aux deux cercles.*

IV. *Les cercles orthogonaux à l'un des cercles bissecteurs forment des séries de cercles isogonaux aux*

---

(1) Une autre donnant les mêmes résultats était obtenue par la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques.

deux premiers dont le centre de similitude est centre radical commun à toutes ces séries, parmi lesquelles comptent les séries de cercles orthogonaux et de cercles tangents à la fois aux deux.

V. *Si l'on considère trois cercles* C_1, C_2, C_3, *la ligne* $S_3 S_1 S_2$ *de leurs centres de similitude est l'axe radical commun à toute la série de leurs cercles isogonaux, série dont font partie le cercle orthogonal et le cercle tangent aux trois cercles.*

Dans la combinaison des centres de similitude, il est nécessaire que les similitudes inverses entrent en nombre pair 0 ou 2. Les diverses combinaisons de similitude directe ou inverse correspondent aux diverses combinaisons de signes des angles d'intersection comptés à partir de la circonférence sécante commune.

Problème. — *Construire un cercle* Γ *coupant un cercle donné* C *sous un angle* α *déterminé et passant par deux points fixes* A *et* B, *réels ou imaginaires conjugués.*

Premier cas : A et B réels. — Soient ρ le rayon du cercle Γ cherché et r celui du cercle C; le cercle Γ′ concentrique à Γ et de rayon $\rho' = \rho + r \cos\alpha$ est orthogonal au cercle C′ concentrique à C et de rayon $r' = r \sin\alpha$. Il sera de plus tangent aux cercles décrits de A et B comme centres avec $r \cos\alpha$ pour rayon, que nous désignerons par cercles A, B.

Construisons le cercle auxiliaire A′ passant par les points d'intersection des cercles A et C′, et dont le centre de similitude avec A soit le centre de C′. Les cercles A et A′ ayant C′ pour bissecteur seront coupés isogonalement par les cercles orthogonaux à celui-ci. Par suite, le cercle tangent aux trois cercles A, A′, B ne sera autre

que le cercle Γ', et les éléments de Γ sont ainsi déterminés.

Second cas : Les points A et B sont imaginaires conjugués, intersections de la droite L et d'un cercle S.

Le cercle Γ passant par A et B doit alors avoir la droite L comme axe radical avec S. Il a donc comme axe de symétrie le diamètre de S perpendiculaire à L. De plus, tous les points de L ont même puissance par rapport aux deux cercles. Le cercle Γ est donc orthogonal à tout cercle ayant son centre sur L et orthogonal à S.

Le problème précédent donne la solution du cercle coupant trois cercles donnés sous un même angle déterminé. Il donne sans plus de difficultés la solution du cercle coupant trois cercles donnés sous trois angles déterminés, solution fondée sur le théorème suivant :

Théorème. — *Soient r_1, r_2, r_3 les rayons de trois cercles C_1, C_2, C_3 de centres O_1, O_2, O_3; le cercle Γ qui les coupe respectivement sous les angles α_1, α_2, α_3 a pour axe radical avec leur cercle orthogonal S une droite dont les points M_3, M_2, M_1 d'intersection avec les lignes des centres O_1O_2, O_3O_1, O_2O_3 détachent à partir des centres des segments déterminés par les rapports*

$$\frac{M_3O_1}{M_3O_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{M_2O_3}{M_2O_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad \frac{M_1O_2}{M_1O_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3},$$

où l'on fait

$$\lambda_1 = r_1 \cos\alpha_1, \quad \lambda_2 = r_2 \cos\alpha_2, \quad \lambda_3 = r_3 \cos\alpha_3,$$

$2\lambda_1$, $2\lambda_2$, $2\lambda_3$ *étant respectivement les longueurs des cordes coupant les cercles O_1, O_2, O_3 sous les angles complémentaires de α_1, α_2, α_3.*

Démonstration. — Considérons deux cercles C_1, C_2;

tous les cercles Σ orthogonaux à la fois à ces deux cercles ont leurs centres sur l'axe radical L de C_1 et C_2 et ont réciproquement pour axe radical commun la ligne $O_1 O_2$ de leurs centres. Le point M_3 d'intersection de celle-ci avec l'axe radical de l'un quelconque des cercles Σ avec le cercle Γ de centre ω, coupant C_1 en $m_1 n_1$ sous l'angle α_1 et C_2 en $m_2 n_2$ sous l'angle α_2, est donc centre radical de Γ et de toute la série des cercles Σ orthogonaux à C_1 et C_2.

Soit un second cercle Γ' coupant C_1 suivant $m'_1 n'_1$, et C_2 suivant $m'_2 n'_2$ sous des angles à la fois égaux ou supplémentaires des angles α_1, α_2 d'intersection de ces cercles et de Γ. Les cordes $m_1 m'_1$, $n_1 n'_1$, $m_2 m'_2$, $n_2 n'_2$ joignant les points d'intersection correspondants d'un même cercle C_1 ou C_2 avec les deux cercles Γ, Γ' également inclinés sur lui sont les unes et les autres isogonales aux deux cercles Γ, Γ' comme cordes sous-tendant dans le cercle C_1 ou le cercle C_2 un arc dont les extrémités coupent Γ et Γ' sous le même angle. Elles concourent donc en un centre S de similitude direct ou inverse des cercles Γ, Γ', suivant que les angles d'intersection seront égaux ou supplémentaires. Le cercle S décrit de leur point de concours avec un rayon dont le carré s^2 égale la puissance composée de Γ et Γ' par rapport au point S (cercle bissecteur de Γ et Γ') sera orthogonal à la fois aux cercles C_1 et C_2 dont la puissance par rapport à S est précisément la puissance composée de ce point par rapport aux cercles Γ et Γ'. Il appartiendra donc à la série Σ

$$s^2 = Sm_1 . Sm'_1 = Sn_1 . Sn'_1 = Sm_2 . Sm'_2 = Sn_2 . Sn'_2.$$

L'axe radical des cercles Γ et Γ', commun avec S, est donc axe radical de Γ et d'un cercle de la série Σ des orthogonaux communs à C_1 et C_2. Il passe donc au

centre radical M_3 commun au cercle Γ et à toute la série Σ.

Le centre radical M_3, commun à la série Σ de tous les cercles orthogonaux à la fois aux deux cercles C_1 et C_2 et à un cercle Γ les coupant sous des angles α_1 et α_2, est donc également commun à la série des cercles Σ et à tous les cercles Γ' formant deux séries dont l'une coupe C_1 et C_2 sous les angles α_1 et α_2, et l'autre sous les angles supplémentaires $\pi - \alpha_1$ et $\pi - \alpha_2$.

Cette observation suffit à déterminer le point M_3 sur la ligne des centres O_1, O_2. C'est, en effet, le point de concours sur cette droite des deux transversales symétriques coupant les deux cercles C_1 et C_2, l'une sous les angles donnés α_1, α_2, l'autre sous les angles supplémentaires $-\alpha_1$, $-\alpha_2$. Ces transversales ne sont autres que les cercles à courbure nulle de l'une et l'autre série Γ. Les cordes interceptées par la transversale sont tangentes aux cercles de centres O_1 et O_2 ayant λ_1 et λ_2 respectivement pour rayons, et, par suite,

$$\frac{M_3 O_1}{M_3 O_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

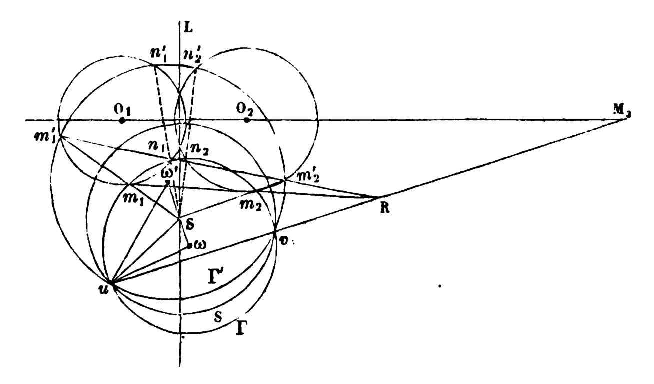
Soient maintenant les trois cercles C_1, C_2, C_3 que le cercle Γ doit couper sous les angles α_1, α_2, α_3. L'axe radical Δ de celui-ci avec le cercle orthogonal à la fois aux trois coupera les lignes des centres en trois points M_3, M_1, M_2 déterminés par les relations énoncées ci-dessus. Il pourra donc être construit comme coupant l'un d'entre les cercles C_1, C_2, C_3 sous l'angle voulu et ayant avec leur cercle orthogonal un axe radical connu.

Les diverses combinaisons de signe des valeurs λ_1, λ_2, λ_3, dont la grandeur absolue représente la longueur des cordes interceptées dans chaque cercle par le rayon du point d'intersection dans le cercle Γ, déterminent quatre

droites Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, à chacune desquelles correspondent deux solutions à angles d'intersections supplémentaires pour lesquelles, dans l'une et dans l'autre, les trois λ sont à la fois changés de signe. Ces deux cercles sont également inclinés sur le cercle orthogonal, leur bissecteur. On trouve ainsi les huit solutions obtenues par toutes les combinaisons de trois angles et de leurs trois supplémentaires.

Observation importante. — Si l'on fait varier λ_1, λ_2, λ_3 proportionnellement, les points M_3, M_2, M_1 restent invariables; d'où la remarque fort intéressante que l'axe radical d'un cercle quelconque avec le cercle orthogonal à trois cercles donnés lui est commun avec toute la série des cercles pour lesquels les cordes λ_1, λ_2, λ_3 ou les cosinus des angles α_1, α_2, α_3 d'intersection varient proportionnellement. Le cercle orthogonal pour lequel ces valeurs sont nulles appartient à toutes les séries.

Remarque. — Dans la figure que l'on construira pour



suivre la démonstration précédente, les droites $m_1 m_2$, $m'_1 m'_2$ d'une part, $n_1 n_2$, $n'_1 n'_2$ d'autre part, concourent en un point R sur l'axe radical uv de Γ et Γ', puisque le

quadrilatère $m_1 m'_1 m'_2 m_2$ est inscriptible, et, par suite, $Rm_1 . Rm_2 = Rm'_1 Rm'_2$.

Recherchons maintenant l'équation de l'ensemble des huit cercles qui coupent trois cercles donnés sous trois angles déterminés.

Désignons par

1, 2, 3 les trois cercles donnés;

α, β, r, C, avec les indices correspondants, les coordonnées cartésiennes du centre, le rayon et la puissance du point quelconque (x, y) par rapport à l'un des cercles;

A, B, R, Γ, mêmes quantités par rapport au cercle Γ cherché;

φ, angle de Γ et de C (avec l'indice correspondant);

$\lambda = -2r\cos\varphi$, corde interceptée par C sur le rayon de Γ allant au point d'intersection. L'angle φ est celui des rayons des deux cercles;

d, distance des centres de Γ et C.

L'équation de l'ensemble des cercles Γ coupant (1), (2), (3) sous les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sera le résultat de l'élimination de A, B, R entre les quatre équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma = 0, \\ &d^2 = R^2 + r^2 + \lambda R, \end{aligned} \right.$$

l'équation en d étant reproduite trois fois avec les indices 1, 2, 3 aux quantités d, r, λ.

Or, si l'on observe d'une manière générale que

$$\begin{aligned} d^2 &= (\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 = R^2 + r^2 + \lambda R, \\ C &= (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2, \\ \Gamma &= (x - A)^2 + (y - B)^2 - R^2, \end{aligned}$$

retranchant membre à membre l'équation en d de l'équation Γ, on remplacera le système (1) par le sys-

tème équivalent

$$(2)\qquad \begin{cases} (x-A)^2+(y-B)^2=R^2, \\ (x-A)\dfrac{dC}{dx}+(y-B)\dfrac{dC}{dy}+\lambda R = C. \end{cases}$$

Les trois équations obtenues en donnant successivement les indices 1, 2, 3 à C dans l'équation de la seconde ligne déterminent les valeurs de $(x-A)$, $(y-B)$, R qui, portées dans l'équation de la première ligne, donnent le résultat de l'élimination, ou équation du lieu cherché. Si Δ représente le déterminant

$$\left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} \quad \lambda \right| = \Delta,$$

et X, Y, Z les résultats de la substitution de C aux quantités contenues respectivement dans la première, la deuxième et la troisième colonne, l'équation cherchée sera

$$(3)\qquad X^2+Y^2=Z^2,$$

soit

$$(4)\qquad \left| C \quad \frac{dC}{dy} \quad \lambda \right|^2 + \left| \frac{dC}{dx} \quad C \quad \lambda \right|^2 = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} \quad C \right|^2,$$

ou, en se servant des coordonnées homogènes et faisant ensuite $z=1$,

$$(5)\qquad \left| C \quad \frac{dC}{dy} \quad \lambda \right|^2 + \left| \frac{dC}{dx} \quad C \quad \lambda \right|^2 = \frac{1}{4}\left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} \quad \frac{dC}{dz} \right|^2.$$

Ces équations se prêtent à plusieurs remarques intéressantes :

I. Si l'on fait à la fois $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, l'équation se réduit à $Z=0$. Sur la forme (5), on lit immédiatement que les polaires des points du cercle orthogonal par rapport aux trois cercles sont concourantes, et par

la symétrie des équations aux dérivées partielles qu'elles concourent en un point du cercle.

II. Si l'on cherche l'intersection du cercle $Z = 0$ avec les divers cercles du lieu, on reconnaît que l'équation (3) ne peut être satisfaite avec $Z = 0$ que si l'on a conjointement $X = 0$ et $Y = 0$, comme dans le cas du cercle orthogonal, ou bien qu'il est nécessaire que le dénominateur commun Δ soit nul. Les cercles du lieu coupent donc le cercle orthogonal au même point que le lieu $\Delta = 0$, soit

$$\tfrac{1}{4}\Delta = \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & y-\beta_1 & \lambda_1 \\ x-\alpha_2 & y-\beta_2 & \lambda_2 \\ x-\alpha_3 & y-\beta_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0,$$

dans lequel on reconnaît aisément la droite $M_3M_2M_1$ définie plus haut. Son équation, évidemment linéaire après le choix des signes fait sur $\cos\varphi$ pour chacune des quantités λ, est, en effet, satisfaite en posant, pour le point M_3,

$$\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2} = \frac{y-\beta_1}{y-\beta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}}{\sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2}} = \frac{M_3O_1}{M_3O_2},$$

et de même pour M_2 et M_1.

III. L'équation du système des huit cercles peut se mettre sous la forme d'un déterminant, tel que

$$\begin{vmatrix} X & Z+Y \\ Z-Y & X \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \begin{vmatrix} Y & Z+X \\ Z-X & Y \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on fait

$$\lambda = \pm r\cos\varphi$$

et

$$X = \begin{vmatrix} C & \frac{dC}{dy} & \lambda \end{vmatrix},$$

$$Y = \begin{vmatrix} \frac{dC}{dx} & C & \lambda \end{vmatrix},$$

$$Z = \begin{vmatrix} \frac{dC}{dx} & \frac{dC}{dy} & C \end{vmatrix};$$

$$Z + Y = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} - \lambda \quad C \right| = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} - \lambda \quad \frac{dC}{dz} + \lambda y \right|,$$

$$Z - Y = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} + \lambda \quad C \right| = \left| \frac{dC}{dx} \quad \frac{dC}{dy} + \lambda \quad \frac{dC}{dz} - \lambda y \right|.$$

Avec un choix préalable des signes de $\cos\varphi$, l'équation ne représente qu'un groupe des deux cercles conjugués.

En supposant le centre des coordonnées au centre du cercle orthogonal de rayon p (réel ou imaginaire), l'équation de l'ensemble des deux cercles conjugués ayant le cercle orthogonal pour bissecteur s'obtiendra fort simplement. On a, d'une manière générale,

$$C = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + p^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix};$$

d'où, en posant, pour simplifier,

$$\begin{aligned} L &= |\, a \quad b \quad \lambda \,|, \\ M &= |\, 1 \quad b \quad \lambda \,|, \\ N &= |\, a \quad 1 \quad \lambda \,|, \\ 2T &= |\, a \quad b \quad 1 \,|, \end{aligned}$$

le dernier déterminant étant le double de la surface du triangle des centres O_1, O_2, O_3, et le premier, le double de la somme des produits des triangles que le centre O du cercle orthogonal forme avec deux des centres, par la corde λ détachée sur le troisième cercle par les rayons du cercle Γ, on aura

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\Delta &= Mx + Ny + L, \\ \tfrac{1}{2}X &= M(x^2 - y^2 + p^2) + 2Nxy + 2Lx \\ &= 2x(Mx + Ny + L) - M(x^2 + y^2 - p^2), \\ \tfrac{1}{2}Y &= N(y^2 - x^2 + p^2) + 2Mxy + 2Ly \\ &= 2y(Mx + Ny + L) - N(x^2 + y^2 - p^2), \\ Z &= -8T(x^2 + y^2 - p^2), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(Mx + Ny + L), \\ X &= x\Delta - 2M\Sigma, \\ Y &= y\Delta - 2N\Sigma, \\ Z &= -8T\Sigma, \end{aligned}$$

en représentant par Σ la puissance du point quelconque (x, y) par rapport au cercle orthogonal

$$\Sigma = x^2 + y^2 - p^2,$$

et l'équation (3) devient homogène et du second degré en Δ et Σ :

$$4\Sigma^2(M^2 + N^2 - 16T^2) + 4L\Sigma\Delta + p^2\Delta^2 = 0,$$

d'où les deux valeurs conjuguées de $\frac{\Sigma}{\Delta}$ représentant les deux cercles également inclinés sur le cercle orthogonal correspondant aux valeurs de λ respectivement changées de signe

$$\frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - p^2(M^2 + N^2 - 16T^2)}}{2(M^2 + N^2 - 16T^2)}.$$

Les valeurs des coordonnées A et B du centre cherché et son rayon R seront donnés par les expressions

$$A = x - \frac{X}{\Delta} = 2M\frac{\Sigma}{\Delta},$$

$$B = y - \frac{Y}{\Delta} = 2N\frac{\Sigma}{\Delta},$$

$$R = \frac{Z}{\Delta} = -8T\frac{\Sigma}{\Delta},$$

faciles à construire.

Les raisonnements et les calculs qui précèdent resteront les mêmes si de la Géométrie plane on passe à la Géométrie à trois dimensions, et la détermination de seize sphères coupant quatre sphères (1), (2), (3), (4) de centres O_1, O_2, O_3, O_4, et de rayons r_1, r_2, r_3, r_4 sous des angles donnés $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, sera tout aussi simple. En posant $\lambda = -r\cos\varphi$, c'est-à-dire désignant par λ la longueur interceptée par la sphère de centre O sur les arêtes du cône ayant son sommet au centre de l'une Γ des sphères cherchées, et pour base le cercle d'intersec-

tion (réel ou imaginaire avec l'angle φ), on déterminera le plan radical de la sphère S et de la sphère orthogonale Σ aux quatre sphères données par la position des six points M d'intersection de ce plan avec les arêtes du tétraèdre des centres. Le point M_{12} où le plan radical coupe l'arête O_1O_2 est déterminé par la relation

$$\frac{M_{12}O_1}{M_{12}O_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Ce plan déterminé, la construction sera ramenée à la détermination sur le plan diamétral commun à la sphère orthogonale et à l'une quelconque des quatre, ainsi qu'au plan radical, du cercle coupant sous un angle déterminé le grand cercle de la sphère choisie et ayant avec le grand cercle de la sphère orthogonale la trace du plan radical pour axe radical.

L'ensemble des seize sphères de la solution sera donné par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2,$$

où X, Y, Z, U représentent les déterminants résultats de la substitution de S avec l'indice convenable respectivement aux termes des première, deuxième, troisième et quatrième colonnes du déterminant

$$\Delta = \left| \frac{dS}{dx} \quad \frac{dS}{dy} \quad \frac{dS}{dz} \quad \lambda \right| \quad (\lambda = \pm r\cos\varphi),$$

qui représente le plan radical des sphères Γ cherchées et de la sphère orthogonale aux quatre sphères données représentées par l'équation générale

$$S = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0,$$

avec les indices 1, 2, 3, 4.

Représentant de même par L, M, N, P, 6V les déterminants

$$L = | a \quad b \quad c \quad \lambda |, \quad M = | 1 \quad b \quad c \quad \lambda |, \quad N = | a \quad 1 \quad c \quad \lambda |,$$
$$P = | a \quad b \quad 1 \quad \lambda |, \quad 6V = | a \quad b \quad c \quad 1 |,$$

où les sphères ont pour équation générale

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c + p^2 = 0$$

rapportée au centre de la sphère orthogonale, on obtiendrait l'équation de l'ensemble des deux sphères conjuguées ayant le plan Δ radical commun avec la sphère orthogonale et pour lesquelles celle-ci est bissectrice du dièdre courbe d'intersection.

Représentant par $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - p^2$ la puissance d'un point par rapport à la sphère orthogonale, l'équation de l'ensemble des deux sphères conjuguées à intersections supplémentaires avec les quatre sphères s'obtiendra comme celle des deux cercles conjugués. On a, en effet, immédiatement, après le choix fait sur les signes de $\cos\varphi$ pour séparer les seize sphères S en huit groupes à intersections correspondantes supplémentaires dans les deux conjuguées :

$$X = x\Delta - 4M\Sigma,$$
$$Y = y\Delta - 4N\Sigma,$$
$$Z = z\Delta - 4P\Sigma,$$
$$U = -48V\Sigma;$$

d'où

$$16\Sigma^2(M^2 + N^2 + P^2 - 144V^2) + 8L\Delta\Sigma + p^2\Delta^2 = 0$$

et enfin

$$\frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - p^2(M^2 + N^2 + P^2 - 144V^2)}}{4(M^2 + N^2 + P^2 - 144V^2)}.$$

L'une des sphères correspond au signe + affecté au radical; la sphère dont les angles d'intersection avec les quatre sphères sont respectivement supplémentaires correspond au signe —.

Les diverses combinaisons de signes pour les quatre cosinus donnent huit groupements, soit huit plans Δ radicaux des huit groupes avec la sphère Σ orthogonale aux quatre sphères données.

Les coordonnées du centre et le rayon de la sphère cherchée seront donnés par les valeurs

$$A = 4M\frac{\Sigma}{\Delta}, \quad B = 4N\frac{\Sigma}{\Delta}, \quad C = 4P\frac{\Delta}{\Sigma}, \quad R = -48V\frac{\Sigma}{\Delta}.$$

Nous terminerons par quelques détails sur la construction du cercle Γ coupant un cercle donné C sous l'angle φ et ayant avec un autre cercle Σ l'axe radical déterminé Δ.

Si, d'un point quelconque de Δ pris pour centre, on décrit un cercle auxiliaire I orthogonal au cercle Σ, il le sera également au cercle cherché Γ. Si, en outre, on décrit avec $r\sin\varphi$ pour rayon un cercle C′ concentrique au cercle C, il sera tangent au milieu de la corde interceptée sur C par le rayon d'intersection de Γ et, par suite, orthogonal au cercle de rayon $R + r\cos\varphi$ concentrique à Γ. Le centre du cercle cherché est donc l'un des deux points d'intersection de la perpendiculaire A menée du centre de Σ à l'axe radical Δ et de la conique ayant pour cercles focaux le cercle auxiliaire I et le cercle de rayon $r\sin\varphi$ concentrique à C avec une différence de distances tangentielles égale à $r\cos\varphi$.

Cette remarque relie la construction obtenue par les raisonnements ci-dessus à la solution du problème qui consisterait à considérer le centre cherché comme situé sur les coniques ayant pour cercles focaux les cercles concentriques à C_1, C_2, C_3 et de rayons $r_1\cos\varphi_1$, $r_2\cos\varphi_2$, $r_3\cos\varphi_3$ avec des différences de distances tangentielles

$$r_1\sin\varphi_1 - r_2\sin\varphi_2, \quad r_1\sin\varphi_1 - r_3\sin\varphi_3, \quad r_2\sin\varphi_2 - r_3\sin\varphi_3.$$

La directrice de la conique correspondant au cercle focal I n'est autre que l'axe radical de celui-ci avec le cercle C dont tous les points sont à une distance tangentielle $r\cos\varphi$ du cercle focal C′. La conique est donc dé-

terminée par les deux points d'intersection de I et C avec les tangentes en ces points, et par les points faciles à déterminer sur les tangentes communes aux deux cercles focaux. Son excentricité, égale au rapport de la distance tangentielle au cercle et à la distance à la corde de double contact, sera déterminée au moyen de l'un des points situés sur les tangentes communes aux deux cercles focaux conjugués. Elle est donc complètement déterminée, et la solution graphique du problème est complète.

La détermination des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles donnés, ou des sphères coupant également sous des angles donnés quatre sphères données, est ainsi obtenue au moyen de constructions n'exigeant que la règle et le compas.

QUESTIONS.

1447. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ des valeurs positives de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation, à coefficients positifs,

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \ldots + A_n x_n = 1.$$

La probabilité que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ soient respectivement supérieurs à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est exprimée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de

$$1 - (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + \ldots + A_n \alpha_n).$$

(E. Cesaro.)

1448. Les chiffres de rang n, dans les puissances successives d'un nombre quelconque, se reproduisent périodiquement. Pour les puissances de 5, la période se compose de $2^{n-2} (n > 3)$ termes, dont la somme est le

double de $9.2^{n-4}-1$. Dans cette période, un même chiffre est répété $\frac{1}{8}(2^{n-3}+\varphi)$ fois ; φ ayant, pour chaque chiffre, des valeurs différentes, suivant la forme de n, comme l'indique le tableau suivant. On a

		$(n=4p)$	$(n=4p+1)$	$(n=4p+2)$	$(n=4p+3)$
Pour 0 et 5....	$\varphi=$	3,	1,	2,	-1
» 1 » 6....	$\varphi=$	-2,	1,	-3,	4
» 2 » 7....	$\varphi=$	-2,	1,	2,	-1
» 3 » 8....	$\varphi=$	3,	-4,	2,	-1
» 4 » 9....	$\varphi=$	-2,	1,	-3,	-1

(E. Cesaro.)

1449. La somme des restes du nombre entier n, divisé par chacun des nombres entiers qui le précèdent, augmentée de la somme des diviseurs des nombres non supérieurs à n, est égale à n^2 [1]. (E. Cesaro.)

1450. 1° La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres premiers à N et non supérieurs à ce nombre est divisible par N, si m est impair.

2° La somme des produits m à m des nombres premiers à N et non supérieurs à ce nombre est divisible par N, si m est impair. (E. Cesaro).

ERRATA.

Page 130, ligne 1, *au lieu de :* courbe, *lisez :* ligne à flexion constante.

Page 131, lignes 3, 5, 10, 11, en remontant, *au lieu de :* $Cx - Az - A\rho$, *lisez :* $Cx - Az + A\rho$.

Rectification. — La question 1431 a déjà été proposée sous le n° 1411 (août 1882).

---

(1) Ce théorème a été énoncé par M. Catalan, comme suit : « La somme des diviseurs des nombres 1, 2, 3, ..., n égale la somme des plus grands multiples de ces nombres, non supérieurs à n. »

SUR UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

Par M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. La résolution, en nombres entiers, de l'équation indéterminée



$$(1) \qquad x^3 + k = y^2$$

a été, depuis Fermat, l'objet d'intéressantes études de la part de différents géomètres, Euler en tête. Nous en tenant d'abord à la contribution fournie par les *Nouvelles Annales,* nous citerons ici, après le théorème énoncé par M. Catalan dans le premier volume de la Collection, p. 520, les remarquables articles insérés tour à tour par Le Besgue (1re série, t. IX, p. 178; 2e série, t. VIII, p. 452), par M. Gerono (2e série, t. VIII, p. 454 et 559; t. IX, p. 469; t. X, p. 204; t. XVI, p. 325), par M. E. de Jonquières (2e série, t. XVII, p. 374 et 514).

Les conclusions de ces articles se rapportent surtout à des cas d'impossibilité de l'équation considérée, ou à des limitations auxquelles elle est soumise pour des valeurs particulières de l'entier donné k. Mais la question n'en est pas moins intéressante quand on l'envisage au point de vue de la résolution de l'équation. C'est sur quoi nous allons présenter quelques indications, fort incomplètes sans doute, mais qui pourront mettre sur la voie de recherches ultérieures. Quelques propriétés des nombres, dignes d'être signalées, se présenteront d'elles-mêmes comme conséquences immédiates des formules posées.

2. Il est facile d'abord d'établir des relations d'iden-

tité propres à vérifier l'équation (1) pour certaines valeurs de k.

Ainsi l'égalité très simple

$$(2)\qquad (a^2 - 2b)^3 + b^2(8b - 3a^2) = (a^3 - 3ab)^2,$$

où b peut être changé en $-b$, donne directement une solution dans le cas assez étendu de $k = b^2(\pm 8b - 3a^2)$. Par exemple :

$$2^3 - 4 = 2^2,\quad -1^3 + 5 = 2^2,\quad 3^3 - 11 = 4^2,$$
$$7^3 - 19 = 18^2,\quad -3^3 + 52 = 5^2,\quad \ldots.$$

Le résultat particulier

$$(a^2 \mp 2)^3 - (3a^2 \mp 8) = (a^3 \mp 3a)^2,$$

pour le remarquer en passant, met en évidence que *tout nombre de l'une des formes* $3a^2 \mp 8$ *est la différence entre un cube et un carré*. On exclut, dans le cas des signes supérieurs, l'hypothèse de $a = 1$, qui conduit à l'égalité $-5 = -1^3 - 2^2$, c'est-à-dire $5 = 1^3 + 2^2$.

La même égalité (2), en y changeant a en $2a$, et b en $\frac{b}{2}$, se change en la transformée

$$(4a^2 - b)^3 + b^2(b - 3a^2) = (8a^3 - 3ab)^2,$$

par où l'on satisfait à (1) lorsque $k = b^2(\pm b - 3a^2)$. Par exemple,

$$3^3 - 2 = 5^2,\quad 5^3 - 4 = 11^2,\quad 6^3 - 20 = 14^2,$$
$$7^3 - 54 = 17^2,\quad 13^3 - 81 = 46^2,\quad \ldots.$$

Cette transformée s'exprime aussi par la relation équivalente

$$(a^2 + b)^3 - b(3a^2 - b)^2 = (a^3 - 3ab)^2,$$

où b peut être positif ou négatif.

Les résultats particuliers

$$(4a^2 \mp 1)^3 - (3a^2 \mp 1) = (8a^3 \mp 3a)^2,$$
$$(a^2 \mp 1)^3 \pm (3a^2 \pm 1)^2 = (a^3 \pm 3a)^2$$

nous font reconnaître incidemment que :

1° *Tout nombre de l'une des formes* $3a^2 \mp 1$, *ainsi que tout carré de la forme* $(3a^2 - 1)^2$, *est la différence entre un cube et un carré;*

2° *Tout carré* $(3a^2 + 1)^2$, *à l'exception de* 16, *est la différence entre un carré et un cube.*

On observera, à l'égard de cette dernière proposition, que lorsque $a = 0$, la formule donne le résultat insignifiant $1^2 = 0 + 1^3$; mais alors on a $1^2 = 3^2 - 2^3$.

3. L'identité (2) rentre, du reste, dans la formule

$$(p^2 + kq^2)^3 - kq^2(3p^2 - kq^2)^2 = (p^3 - 3kpq^2)^2,$$

assignée par Euler pour la résolution, en entiers, de l'équation $x^3 - kz^2 = y^2$. Faisant $q = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité de la relation algébrique, on a effectivement la transformée ci-dessus de l'identité (2).

Nous ne devons pas omettre de rappeler ici l'important Mémoire : *Sur certains nombres complexes compris dans la formule* $a + b\sqrt{-c}$, inséré par le P. Pepin dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 3e série, t. I, p. 317. Dans cet écrit, le savant auteur reproduit et étend considérablement plusieurs recherches d'Euler, Legendre et autres géomètres, sur des questions d'Analyse indéterminée. Les équations [entre autres, différents cas particuliers de l'équation (1) par nous considérée] y sont traitées au double point de vue de la résolution, quand elle est possible, et de l'indication des cas d'impossibilité ou de limitation.

4. L'identité

$$(3)\quad \left(\frac{9\alpha^4-8\alpha\beta^2}{4\beta^2}\right)^3+\beta^2-\alpha^3=\left(\frac{27\alpha^6-36\alpha^3\beta^2+8\beta^4}{8\beta^3}\right)^2,$$

que l'on obtient par un procédé indiqué dans l'*Analyse indéterminée* d'Euler (Chap. VIII), mérite d'être signalée; elle sert à amener une nouvelle solution de (1) (et, par suite, une infinité de solutions), à l'aide d'une solution préalable $\alpha^3+k=\beta^2$, supposée connue.

Pour des valeurs entières ou rationnelles de α, β, les solutions fournies par cette formule se trouveront généralement exprimées en nombres rationnels x, y. Par exemple, l'équation $x^3+8=y^2$ étant vérifiée par les valeurs $x=1$, $y=3$, nous assignerons ces valeurs à α et β, dans l'identité (3), et il en résultera la nouvelle solution, en nombres rationnels,

$$\left(-\frac{7}{4}\right)^3+8=\left(\frac{13}{8}\right)^2.$$

En certains cas, une solution entière en amène une autre de même nature. Par exemple, pour $\alpha=2h\gamma$, $\beta=2\gamma$, valeurs de x et y constituant une solution entière de l'équation

$$x^3-4\gamma^2(2h^3\gamma-1)=y^2;$$

la formule (3) fait connaître la nouvelle solution entière

$$[h\gamma(9h^3\gamma-4)]^3-4\gamma^2(2h^3\gamma-1)=(27h^6\gamma^3-18h^3\gamma^2+2\gamma)^2.$$

Le resultat particulier

$$(9\gamma^2\pm4\gamma)^3\pm4\gamma^2(2\gamma\pm1)=(27\gamma^3\pm18\gamma^2+2\gamma)^2$$

nous conduit à remarquer, incidemment, que :

1° *La somme du carré et du cube de tout nombre pair peut s'exprimer par la différence entre un carré et un cube;*

2° *La différence entre le cube et le carré d'un même nombre pair peut s'exprimer par la différence entre le cube et le carré de deux nombres entiers inégaux.*

5. Dans le cas de $\alpha = 2h\beta$, d'où $k = \beta^2(1 - 8h^3\beta)$, l'identité (3) devient

$$[4h\beta(9h^3\beta - 1)]^3 + \beta^2(1 - 8h^3\beta) = (6^3h^6\beta^3 - 6^2h^3\beta^2 + \beta)^2.$$

Dans le cas de $\alpha = 2h\gamma$, $\beta = 3\gamma$, on obtient

$$[4h\gamma(h^3\gamma - 1)]^3 + \gamma^2(9 - 8h^3\gamma) = (8h^6\gamma^3 - 12h^3\gamma^2 + 3\gamma)^2.$$

Dans le cas, enfin, de $\alpha = -2h\gamma$, $\beta = \gamma^2$, l'identité (3) nous donne

$$[4h(\gamma + 9h^3)]^3 + \gamma^3(\gamma + 8h^3) = (\gamma^2 + 6^2h^3\gamma + 6^3h^6)^2.$$

Attribuant, dans ces formules, des valeurs entières à h, β, γ, on trouve des valeurs entières de x, y, k, satisfaisant à l'équation (1).

6. Nous remarquerons ici que, pour certaines valeurs de k, on peut assigner immédiatement deux, et même trois, solutions entières de l'équation (1).

On vérifie, par exemple, l'équation

$$x^3 + 4a^2(a^2 + 1) = y^2,$$

soit en prenant $x = 2a$, $y = 2a(a + 1)$, soit en prenant $x = -2a$, $y = 2a(a - 1)$.

L'équation

$$x^3 + 4(a^2 + a)^2 + 1 = y^2,$$

où a peut être positif ou négatif, admet de même les deux solutions immédiates

$$\begin{cases} x = 2(a+1), \\ y = 2(a+1)^2 + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2a, \\ y = 2a^2 + 1, \end{cases}$$

en outre de la solution évidente $x = -1$, $y = 2(a^2 + a)$.

Pour l'équation

$$x^3 + 4a^3(9a+2) = y^2,$$

les solutions immédiates sont $x = -2a$, $y = 6a^2$, et $x = 4a+1$, $y = 6a^2+6a+1$.

Pour l'équation

$$x^3 + \left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2 = y^2,$$

on a les deux solutions

$$\begin{cases} x = a+1, \\ y = \dfrac{(a+1)(a+2)}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ y = \dfrac{(a-1)a}{2}, \end{cases}$$

d'où cette propriété, que *le carré d'un nombre triangulaire est, en même temps, la somme d'un carré et d'un cube, et la différence entre un carré et un cube.*

Pour

$$x^3 + \left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2 + 8 = y^2,$$

on a

$$\begin{cases} x = -(a-1), \\ y = \dfrac{a^2-a+6}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a+2, \\ y = \dfrac{a^2+3a+8}{2}, \end{cases}$$

en outre de la solution évidente $x = -2$, $y = \dfrac{a^2+a}{2}$.

Citons, comme dernier exemple, l'équation

$$x^3 + \frac{a^2(9a^2+14a+9)}{4} = y^2,$$

à laquelle on satisfait par les trois systèmes de valeurs de x et y :

$$\begin{cases} x = a, \\ y = \dfrac{3(a^2+a)}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2a, \\ y = \dfrac{3(a^2-a)}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a+1, \\ y = \dfrac{3a^2+3a+2}{2}. \end{cases}$$

7. Des résultats qui viennent d'être exposés découlent,

relativement à l'équation (1), des conséquences importantes sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas en ce moment. Signalons seulement, en terminant, les propositions qui suivent, assez curieuses au point de vue de la théorie des nombres.

1° *Le double carré de tout nombre entier est égal, d'une infinité de manières, à la différence entre une somme de deux carrés et une somme de deux cubes.*

C'est une conséquence de l'identité

$$[4h\beta(9h^3\beta-1)]^3+[4h\beta(9h^3\beta+1)]^3+2\beta^2$$
$$=(6^3h^6\beta^3-6^2h^3\beta^2+\beta)^2+(6^3h^6\beta^3+6^2h^3\beta^2+\beta)^2.$$

Ainsi, pour $\beta=1$,

$$2.1^2=(181^2+253^2)-(32^3+40^3),$$
$$2.1^2=(13537^2+14113^2)-(568^3+584^3),$$
....

La même identité, où $\beta=1$, pouvant être mise sous la forme

$$4^3(3h^2)^3[(3h^2)^3+1^3]+1=(6^3h^6+1)^2+(6^2h^3)^2,$$

nous apprend encore que :

2° *L'unité peut être représentée, d'une infinité de manières, soit en nombres entiers, soit en nombres rationnels, par la différence entre une somme de deux carrés et une somme de deux cubes.*

Ainsi,

$$1=(217^2+36^2)-(36^3+12^3),$$
$$1=\left[\left(\frac{35}{27}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{4}{9}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^3\right],$$
....

Des deux formules

$$6a^2b^2 = [(4a^2 - b)^3 + (4a^2 + b)^3] - [(8a^3 - 3ab)^2 + (8a^3 + 3ab)^2],$$
$$6a^2b^2 = [(a^2 - 2b)^3 + (a^2 + 2b)^3] - [(a^3 - 3ab)^2 + (a^3 + 3ab)^2],$$

lesquelles se déduisent de (2), et auxquelles on peut joindre des résultats particuliers, tels que

$$6(a^3)^2 = [(2a^2)^3 + (2a^2)^3] - [(a^3)^2 + (3a^3)^2],$$
$$6(a^3)^2 = [(2a^2)^3 + (3a^2)^3] - [(2a^3)^2 + (5a^3)^2],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

il résulte que :

3° *Le sextuple d'un carré peut toujours s'exprimer, au moins de deux manières différentes, par une somme de deux cubes, diminuée d'une somme de deux carrés.*

Exemples :

$$6.1^2 = (2^3 + 2^3) - (1^2 + 3^2) = (3^3 + 5^3) - (5^2 + 11^2),$$
$$6.2^2 = (2^3 + 6^3) - (2^2 + 14^2) = (15^3 + 17^3) - (58^2 + 70^2),$$
$$6.3^2 = (7^3 + 11^3) - (18^2 + 36^2) = \cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

4° *Le triple carré d'un nombre pair plus grand que 2 est égal à la différence entre une somme de deux carrés et une somme de deux cubes.*

C'est ce qui résulte de la formule

$$3(2ab)^2 = [(a^3 - 3ab)^2 + (a^3 + 3ab)^2] - [(a^2 - b)^3 + (a^2 + b)^3],$$

où l'on voit de plus que, si ab n'est pas un nombre premier, la décomposition indiquée pourra s'effectuer au moins de deux manières différentes. Ainsi :

$$3.12^2 = (10^2 + 26^2) - (1^3 + 7^3),$$
$$3.12^2 = (9^2 + 45^2) - (7^3 + 11^3),$$
$$3.12^2 = (198^2 + 234^2) - (35^3 + 37^3).$$

Enfin, des deux premières formules du n° 5, où l'on fera $\beta + \gamma = 0$ après les avoir ajoutées ensemble, il résulte que :

5° *Le décuple d'un carré peut être représenté, d'une infinité de manières, par une somme de deux carrés, diminuée d'une somme de deux cubes.*

On trouve, par exemple, dans le cas où le carré considéré est égal à l'unité :

$$10.1^2 = (181^2 + 23^2) - (32^3 + 8^3),$$
$$10.1^2 = (13537^2 + 611^2) - (568^3 + 72^3),$$
$$10.1^2 = (14113^2 + 419^2) - (584^3 + 56^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

à quoi viennent s'ajouter les égalités que l'on obtient par d'autres moyens, telles que :

$$10.1^2 = (5^2 + 1^2) - (2^3 + 2^3),$$
$$10.1^2 = (16^2 + 2^2) - (5^3 + 5^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est bon d'observer que, dans les différentes décompositions qui viennent d'être indiquées, on peut admettre qu'*aucun des carrés ne se réduit à zéro, tous les cubes sont plus grands que zéro.*

THÉORÈME DE CINÉMATIQUE;

PAR M. ED. DEWULF,
Lieutenant-Colonel du Génie.

Une figure se déplace dans son plan: soient a et b deux de ses points, non situés en ligne droite avec le centre instantané de rotation O_1, *α et β les centres de*

courbure des trajectoires de a et de b. Les droites ab, αβ concourent sur une droite issue de O_1 *et parallèle à la corde de l'arc déterminé par l'angle* aO_1b *sur le cercle des inflexions.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons nous appuyer sur un lemme que nous avons énoncé dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (mai 1881) :

Sur une droite issue du centre instantané de rotation O_1, *les points décrivants a et les centres de courbure α de leurs trajectoires forment deux ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en* O_1.

En effet, les segments O_1a, $O_1\alpha$ sont liés par la relation

$$\frac{1}{O_1\alpha} - \frac{1}{O_1a} = \text{const.},$$

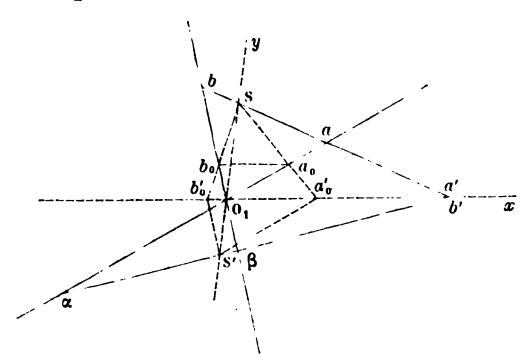
qui est l'expression la plus simple de deux ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 (Chasles, *Géométrie supérieure*, 2e édition, n° **171**).

Supposons maintenant que les ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 soient déterminées, sur O_1a, par le point a_0 correspondant au point α_∞ de l'infini, et sur O_1b par b_0 correspondant à β_∞.

Pour construire le point α qui correspond à un point a, traçons, par le centre instantané O_1, deux axes rectangulaires, tels que O_1x soit parallèle à la droite a_0b_0, c'est-à-dire à la corde de l'arc déterminé par l'angle aO_1b sur le cercle des inflexions.

Soit S le point d'intersection de O_1y avec la droite ab; si nous projetons, du point S, les points décrivants $a, \ldots, a_0$ sur O_1x en $a', \ldots, a'_0$, la ponctuelle de O_1x sera perspective avec la ponctuelle formée sur O_1a par

les centres de courbure $\alpha, \ldots, \alpha_\infty$, et les droites qui joignent les points correspondants de ces deux ponctuelles vont concourir en un point S' de $O_1 S$. Ce point S' est déterminé par la droite $a'_0 \alpha_\infty$, c'est-à-dire par la parallèle à $O_1 a$ menée par a_0. Si nous joignons ensuite le point S' au point a', l'intersection de cette droite avec $O_1 a$ nous donne le point α centre de courbure de la trajectoire du point a.



Nous déterminons, de la même manière, le centre de courbure β de la trajectoire du point b. Nous tirons $S b_0$ qui coupe $O_1 x$ en b'_0 et par b'_0 nous menons une parallèle à $O_1 b$ qui coupe $O_1 S$ au point S'.

En effet, le triangle formé par cette dernière droite, par $b'_0 a'_0$ et par $a'_0 S'$, a ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle $b_0 O_1 a_0$; ces deux triangles sont homologiques, et la parallèle à $O_1 b$ menée par b'_0 coupe $O_1 S$ en S'. Donc, le point β se trouve sur la droite $\alpha a'$, ce qui démontre notre théorème.

Corollaire. — Soient (a) et (b) deux courbes de la figure mobile; (e_a), (e_b) les enveloppes de ces courbes; α et β les centres de courbure de (a) et (b) en leurs points de contact avec leurs enveloppes.

On sait que les points a_0, b_0, définis comme plus haut,

sont les projections sur $O_1 a$ et $O_1 b$ du centre instantané du second ordre O_2.

On sait aussi que le centre de courbure α_1 de (e_a) au point de contact avec l'enveloppée n'est autre que le centre de courbure de la trajectoire de α. Le centre de courbure β_1 de (e_b) est le rayon de courbure de la trajectoire de β.

D'après notre théorème, énoncé ci-dessus, la droite issue de O_1 et parallèle à $a_0 b_0$ et les droites $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$ concourent en un même point. Ainsi se trouve démontré le théorème de Cinématique, dû à M. Habich, et que ce géomètre a fait connaître récemment dans les *Nouvelles Annales* (¹).

Observation. — Le théorème général que nous avons démontré est lui-même un cas particulier de celui-ci :

Une figure se déplace dans son plan. Soient O *le centre instantané de rotation, a et a' deux points quelconques fixes de la figure, b un point mobile sur* O*b et* β *le centre de courbure de la trajectoire du point b au moment considéré; le lieu géométrique de l'intersection des rayons ab, a'*β *est une conique passant par le centre instantané; si les points a et a' sont en ligne droite avec le centre* O, *ce lieu géométrique est une droite passant par* O; *enfin, si le point a' est le centre de courbure de la trajectoire du point a au moment considéré, le lieu géométrique est une droite passant par le centre instantané et parallèle à la corde qui sous-tend l'arc déterminé sur le cercle des inflexions par l'angle a*O*b.*

30 octobre 1882.

(¹) 3ᵉ série, t. I, p. 458.

SUR LES CUBIQUES GAUCHES PASSANT PAR CINQ POINTS DONNÉS;

PAR M. G. KŒNIGS.

En cherchant la solution de la question 1285 proposée par M. Genty dans les *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. XVII, p. 487, j'ai été conduit à quelques propriétés des cubiques gauches passant par cinq points donnés : j'énoncerai simplement les résultats en me contentant d'indiquer la méthode qui m'y conduit.

I. Les triangles que les diverses cubiques passant par cinq points tracent sur un plan fixe α sont, on le sait, conjugués par rapport à une conique H_α de ce plan : la trace sur le plan α de la droite joignant deux des cinq points est le pôle de la trace du plan des trois autres. Appelons, pour abréger, points correspondants les sommets du triangle qu'une quelconque des cubiques du système détermine sur le plan α. On voit tout de suite que :

La conique H_α étant le lieu des points du plan α qui coïncident avec un de leurs correspondants, H_α se trouve être le lieu des points de contact du même plan avec les cubiques du système qui le touchent.

Désignons par C_x la cubique du système qui passe par le point x de l'espace. La cubique C_v, qui passe par le point v pris sur la conique H_α, a sa tangente vt dans le plan α, elle perce ce plan au point w pôle de vt par rapport à H_α. Lorsque le point v décrit la conique, w décrit

une courbe A_α dans le plan α, et vt enveloppe une courbe B_α.

La courbe A_α est le lieu des points du plan α dont les points correspondants coïncident.

La courbe B_α est l'enveloppe dans le plan α des droites du complexe formé par les tangentes aux cubiques du système.

On peut remarquer que le cône du second ordre ayant w pour sommet et contenant la cubique $C_v = C_w$ est tangent au plan α tout du long de vw; d'ailleurs, cette droite vw touche au point v la conique H_α. Donc :

La courbe A_α est le lieu des sommets des cônes du second ordre contenant les cinq points donnés et tangents au plan donné.

La conique H_α est l'enveloppe des génératrices de contact.

L'étude de la courbe A_α complétera donc la solution de la question 1285.

II. Pour faciliter l'étude des courbes A_α et B_α, nous introduirons un système de quartiques planes que nous allons définir.

Soient Δ une droite du plan α, d son pôle par rapport à H_α; d' et d'' les points correspondants de d, situés sur Δ. Les cubiques du système qui rencontrent une fois Δ tracent sur le plan α, outre la droite Δ, une courbe $U_\alpha(\Delta)$.

La courbe $U_\alpha(\Delta)$ est du quatrième ordre; elle a un point double en d, et dd', dd'' sont les tangentes en ce point double.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de remarquer qu'un point x décrivant la droite Δ, ses correspon-

dants y et z sont alignés avec le point d : sur toute droite λ issue de d, il n'y a que deux points du lieu, et l'un d'eux vient coïncider avec d chaque fois que la droite λ vient coïncider avec dd' ou dd''.

La courbe $U_\alpha(\Delta)$ coupe la droite Δ aux deux points d' et d'' d'abord, et puis aux points où Δ coupe la conique H_α. Cette conique est donc rencontrée en six autres points u par la courbe $u_\alpha(\Delta)$. Au sujet des six droites du joignant le point d à ces points, on observe que :

1° Elles sont tangentes aux points u à la courbe $U_\alpha(\Delta)$;

2° Elles sont tangentes aux points u aux cubiques C_u et, par suite, sont des droites du complexe des tangentes aux cubiques du système;

3° En dehors de ces six droites, on ne peut mener du point d d'autres tangentes à la courbe B_α; et en dehors de ces mêmes droites et des tangentes dd' et dd'' en son point double d, la courbe $U_\alpha(\Delta)$ n'admet pas d'autre tangente issue du point d.

On voit donc que la courbe $U_\alpha(\Delta)$ est de la dixième classe, et, par suite, qu'elle n'admet pas d'autre point double que le point d; on peut voir aussi que la courbe $U_\alpha(\Delta)$ passe par les dix traces sur le plan α des droites joignant les cinq points deux à deux, etc.

En faisant tourner le plan α autour de la droite Δ, on arrive à ce résultat :

La surface décrite par les cubiques du système qui rencontrent une droite fixe est du cinquième ordre. Elle admet une cubique double, à savoir : la cubique du système qui s'appuie deux fois sur la droite fixe.

En dehors de la droite fixe, cette surface contient les dix droites joignant les cinq points donnés pris deux à deux.

III. Revenons à la courbe B_α; nous venons de con-

struire les tangentes qu'on peut lui mener d'un point quelconque du plan : elle est de la sixième classe. Il est aisé de voir qu'elle est unicursale. En effet, appelons 1, 2, 3, 4, 5 les cinq points donnés, la droite (1, 2) peut être adjointe à deux coniques circonscrites au triangle (3, 4, 5) et tangentes au plan α, chacune en l'un des deux points où H_α perce le plan (3, 4, 5); on obtient ainsi deux cubiques singulières du système, tangentes au plan α : la trace du plan (3, 4, 5) s'offre donc deux fois comme tangente à la courbe B_α : c'est donc une tangente double de cette courbe. Ainsi :

La courbe B_α *est de la sixième classe et unicursale : ses dix tangentes doubles sont les traces sur le plan* α *des plans menés par les cinq points pris trois à trois.*

On en déduit pour la courbe A_α, qui est la réciproque de B_α par rapport à H_α, la proposition suivante :

La courbe A_α *est du sixième ordre et unicursale : ses dix points doubles sont les traces sur le plan* α *des droites joignant les cinq points pris deux à deux.*

Et pour le complexe des tangentes aux cubiques du système :

Le complexe formé par les tangentes aux cubiques gauches passant par cinq points est du sixième ordre.

Le cône du complexe est donc du sixième ordre.

Son sommet p étant pris arbitraire dans l'espace, on en connaît trente génératrices, savoir :

1° Les droites joignant p aux cinq points donnés;

2° Les droites joignant p aux dix points que l'on obtient en prenant les traces des droites joignant les cinq points deux à deux, sur le plan des trois autres;

3° Les quinze droites qui, issues de p, rencontrent cha-

cune un couple d'arêtes opposées des cinq tétraèdres que l'on peut former avec les cinq points donnés.

IV. Le complexe qui nous occupe offre un mode de génération intéressant, qui rentre dans un ordre de considérations développées par Transon dans un Mémoire qui a été l'objet d'un Rapport de Chasles (*Comptes rendus,* t. XLII). Si, à tout point p de l'espace, il correspond une direction de droite, la droite issue de p, parallèle à cette direction, fait partie d'un complexe, et le point p s'appelle le *point de départ* de cette droite du complexe. Dans un complexe défini par les points de départ de ses rayons, il existe un système de cônes du second ordre, découverts par Malus, et auquel Transon rattache, dans son Mémoire, d'importantes propriétés infinitésimales des complexes. Imaginons que le point p_0 de l'espace soit le point de départ d'une droite Δ_0 du complexe; si le point p est infiniment voisin de p_0, le rayon Δ, dont p est le point de départ, sera infiniment voisin de Δ_0; si l'on demande que Δ forme avec Δ_0 un élément de surface développable, on trouve que le point p doit définir une droite $p_0 p$ située sur un cône du second ordre ayant p_0 pour sommet : c'est le cône de Malus. Ce cône varie d'un point à l'autre de l'espace et engendre le système de cônes que nous voulions définir.

Dans le cas actuel, tout point p de l'espace définit une cubique C_p, et s'offre comme le point de départ de la tangente à cette courbe en ce point. Le complexe qui nous occupe peut donc être facilement défini par le point de départ de ses rayons.

Relativement au cône de Malus, il nous suffira d'énoncer ce résultat fort simple :

Le cône de Malus relatif à un point p_0 de l'espace est le cône projectif à la cubique C_{p_0}.

Le complexe que nous étudions offre donc une solution du problème suivant, qui dépend d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre :

Trouver un complexe défini par les points de départ de ses rayons, et tel que le cône de Malus relatif à tout point de l'espace contienne cinq points fixes.

V. Nous terminerons en énonçant une proposition concernant les points d'intersection des courbes A_α, B et H_α. Elle consiste en ce que :

Les courbes A_α, B_α *et* H_α *sont tangentes aux six mêmes points.*

Appelons u' un de ces six points; comme appartenant à H_α, u' coïncide avec un de ses correspondants; comme appartenant à A_α, ses deux correspondants coïncident. En u' se réalise donc la coïncidence de trois points correspondants; la cubique $C_{u'}$ est, par suite, osculatrice au plan α. Ainsi :

Il y a six cubiques gauches passant par cinq points et osculatrices à un plan donné. Les six points de contact sont sur une même conique.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. GENOCCHI,
Professeur à l'Université de Turin.

Ce théorème est énoncé dans les *Recherches* de M. Ch. Henry sur les manuscrits de Fermat, et revient à dire

que le système des deux équations

$$2y^2 - 1 = x, \quad 2z^2 - 1 = x^2$$

n'admet de solution en nombres entiers que pour $x = 7$. On écarte, bien entendu, les solutions évidentes $x = 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, et $x = -1$, $y = 0$, $z = \pm 1$.

Le P. Pepin vient de s'occuper de la question ainsi posée, mais ses calculs assez prolongés et difficiles ne conduisent pas à un résultat simple et précis qui devrait être la vérité ou la fausseté de l'assertion de Fermat, car il conclut seulement que, si un nombre peut la démentir, il doit dépasser l'unité suivie de 3848 chiffres. J'ai donc pensé qu'il n'était pas sans intérêt de montrer que quelques principes connus depuis longtemps permettaient non seulement d'abréger beaucoup la discussion, mais de parvenir à une conclusion précise, et cela en suivant la voie tracée par le P. Pepin.

En éliminant x, on trouve

$$z^2 - 1 = 2y^2(y^2 - 1),$$

ou, sous une autre forme,

$$z^2 = y^4 + (y^2 - 1)^2;$$

et ici y peut être un nombre impair ou bien un nombre pair.

Soit y impair. Les formules connues pour les *triangles rectangles en nombres* donneront

$$\pm z = \frac{f^2 + g^2}{2}, \quad y^2 = fg, \quad y^2 - 1 = \frac{f^2 - g^2}{2},$$

f et g étant deux nombres entiers impairs et premiers entre eux. Il s'ensuit, d'après l'équation $y^2 = fg$, qu'on aura

$$f = m^2, \quad g = n^2,$$

avec m et n entiers, et, par conséquent,

$$y^2 = m^2n^2, \quad m^2n^2 - 1 = \frac{f^2 - g^2}{2} = \frac{m^4 - n^4}{2},$$

d'où

$$2(m^4 + 1^4) = (m^2 + n^2)^2,$$

résultat absurde, puisque le double de la somme de deux bicarrés ne peut être un carré. Il y aurait exception pour $m = \pm 1$, $n = \pm 1$, mais cela donnerait $y^2 = 1$, et, par suite, $x = 1$, $z^2 = 1$, solution écartée.

Soit maintenant y pair. On fera

$$\pm z = f^2 + g^2, \quad y^2 = 2fg, \quad y^2 - 1 = f^2 - g^2,$$

en supposant que f et g sont deux nombres entiers, premiers entre eux, le premier pair et le deuxième impair. L'équation $y^2 = 2fg$ donnera

$$f = 2\alpha^2, \quad g = \beta^2,$$

avec α et β nombres entiers, et il en résultera

$$y^2 = 4\alpha^2\beta^2, \quad 4\alpha^2\beta^2 - 1 = f^2 - g^2 = 4\alpha^4 - \beta^4.$$

Cette dernière équation se met sous la forme

$$(2\alpha^2 + \beta^2)^2 = 1 + 8\alpha^4,$$

et, en faisant, pour abréger, $2\alpha^2 + \beta^2 = p$, on a

$$8\alpha^4 = (p+1)(p-1).$$

p est un nombre impair, et $p+1$, $p-1$ sont deux nombres pairs n'ayant d'autre facteur commun que 2. Soit donc $\alpha = mn$, m et n étant premiers entre eux, il s'ensuit

$$p \pm 1 = 2m^4, \quad p \mp 1 = 4n^4,$$

d'où

$$\pm 1 = m^4 - 2n^4,$$

partant

$$m^4 \mp 1 = 2n^4.$$

Ainsi la différence ou la somme $m^4 \mp 1$ de deux bicarrés

serait double d'un carré, ce qui est encore impossible. Il y a exception pour $m = \pm 1$, $n = 0$ ou $n = \pm 1$; mais, dans le premier cas, on aurait

$$\alpha = 0, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad z^2 = 1,$$

solution écartée ; dans le dernier, on aura

$$\alpha = \pm 1, \quad p = 3,$$

d'où

$$2\alpha^2 + \beta^2 = 3, \quad \beta^2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$y^2 = 4, \quad x = 8 - 1 = 7,$$

solution de Fermat. Celle-ci est donc la seule admissible, et le théorème de Fermat est démontré complètement.

Les principes dont j'ai fait usage, sur la somme et la différence de deux bicarrés, remontent au *Traité sur les triangles rectangles* de Frenicle, et on peut les trouver dans un ancien Mémoire d'Euler (*Comment. Acad. Petrop.*, t. X pour 1738, publié en 1747, p. 125 et suiv.). En 1855, j'ai obtenu ces théorèmes en étudiant la théorie des nombres appelés *congrus* par Fibonacci, lesquels peuvent être regardés comme exprimant l'*aire d'un triangle rectangle*, de manière que cette théorie des congrus est intimement liée avec celle des triangles rectangles en nombres, tant cultivée par Diophante, Frenicle, Fermat. J'ai prouvé que les formules

$$r^4 + 4s^4, \quad 2r^4 + 2s^4, \quad r^4 - s^4,$$

où r et s sont supposés entiers, représentent toujours des congrus, et que la même chose a lieu pour les formules

$$r^4 + 6r^2s^2 + s^4, \quad \pm(r^4 - 6r^2s^2 + s^4),$$

si r et s sont deux nombres entiers, l'un pair et l'autre

impair. J'ai prouvé de plus qu'aucun congru n'est carré, ni double d'un carré, ni égal à un carré multiplié par un nombre premier de la forme $8m + 3$, ou par le double d'un nombre premier de la forme $8m + 5$, ni par le produit de deux nombres premiers de la forme $8m + 3$, ni enfin par le double produit de deux nombres premiers de la forme $8m + 5$. Je crois que ces derniers théorèmes étaient nouveaux.

PROPOSITIONS DE M. LIONNET.

I. Trouver un nombre entier dont le carré soit égal au produit $tt't''$ de trois triangulaires consécutifs; ou, autrement, trouver un triangulaire égal à la somme de deux carrés d'entiers dont l'un est l'unité.

II. Quelles sont les valeurs entières et positives de x pour chacune desquelles y^x et y ont le même chiffre des unités pour toute valeur entière et positive de y?

III. La somme des puissances, d'un même degré i impair et positif, des m nombres 1, 2, 3, ..., m est divisible par le triangulaire $t = \frac{1}{2}m(m+1)$, somme de ces m nombres.

IV. Trouver un groupe de trente impairs consécutifs dans lequel le nombre des impairs premiers soit égal à celui des impairs composés.

V. Dans toute suite de soixante entiers consécutifs, dont le plus petit excède cinq, le nombre des impairs premiers est au plus égal à quinze.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION, 1882).

SOLUTION DE M. EDMOND LEVAIRE,

Élève du pensionnat Notre-Dame-du-Sacré-Cœur.

Géométrie analytique.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ *l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes; et soient* α, 6 *les coordonnées d'un point* P *situé dans le plan de cette ellipse.*

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M *et* M' *des tangentes menées du point* P *à l'ellipse, et par les points* Q *et* Q', *où cette ellipse est rencontrée par la droite*

$$\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{6y}{b^2}+\mu=0.$$

Disposer du paramètre μ *et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère, passant par le point* P.

On fait mouvoir le point P *sur la droite représentée par l'équation* $x+y=l$, *et l'on demande :*

1° *Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur la droite* QQ';

2° *Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes* MM' *et* QQ'.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l, *et déterminer ces points. Chercher pour quelles valeurs de* l *ce lieu se réduit à deux droites et déterminer ces droites.*

I. La droite MM′ est la polaire du point P, par rapport à l'ellipse; son équation est

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

La droite QQ′ a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \mu = 0. \tag{2}$$

Donc, l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de ces deux droites avec l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \mu\right) = 0 \tag{3}$$

ou

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda\alpha^2}{a^4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{\lambda\beta^2}{b^4}\right)y^2 + \frac{\lambda\alpha}{a^2}(\mu - 1)x + \frac{\lambda\beta}{b^2}(\mu + 1)y - (\lambda\mu + 1) = 0.$$

La condition pour que cette équation représente une hyperbole équilatère est

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda\alpha^2}{a^4} = -\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\lambda\beta^2}{b^4}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{\beta^2}{b^4}\right) = 0,$$

ce qui exige que

$$\lambda = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{a^4\beta^2 - b^4\alpha^2}\ (1).$$

---

(1) Si $a^4\beta^2 - b^4\alpha^2 = 0$, λ est infini, et l'équation (3) représente le système des deux droites MM′, QQ′. Dans ce cas particulier, il n'y a, en réalité, aucune hyperbole équilatère passant par les points M, M′, Q, Q′. C'est, d'ailleurs, ce qu'il est facile de démontrer sans avoir recours à l'équation (3).

En effet, les coefficients angulaires des droites MM′, QQ′, étant égaux, et de signes contraires, les points M, M′, Q, Q′ où l'ellipse est rencontrée par ces deux droites appartiennent à une même circonférence. Il en résulte que toute conique circonscrite au qua-

Pour que l'hyperbole passe par le point P, il faut la condition

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{6^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{6^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{6^2}{b^2}+\mu\right)=0,$$

ou bien, en réduisant,

$$\lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{6^2}{b^2}\right)+\lambda\mu+1=0.$$

Remplaçant λ par sa valeur, il vient

$$a^2b^2\frac{a^2+b^2}{a^4 6^2-b^4\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{6^2}{b^2}\right)+a^2b^2\frac{a^2+b^2}{a^4 6^2-b^4\alpha^2}\mu+1=0;$$

de cette équation on tire

$$\mu=\frac{6^2-\alpha^2}{a^2+b^2}.$$

Les conditions cherchées sont donc

$$\lambda=a^2b^2\frac{a^2+b^2}{a^4 6^2-b^4\alpha^2}\quad\text{et}\quad\mu=\frac{6^2-\alpha^2}{a^2+b^2}.$$

II. Pour trouver :

1° Le *lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse*

---

drilatère MM'QQ' a des axes respectivement parallèles à ceux de l'ellipse, c'est-à-dire parallèles aux axes de coordonnées. Que si la conique circonscrite au quadrilatère MM'QQ' est une hyperbole équilatère, ses asymptotes seront parallèles aux bissectrices des angles que forment les axes de coordonnées en se coupant au centre de l'ellipse. Or, lorsque $a^4 6^2-b^4\alpha^2=0$, la droite MM' est aussi parallèle à l'une de ces deux bissectrices, car l'égalité supposée $a^4 6^2-b^4\alpha^2=0$ donne

$$\frac{\alpha}{6}=\pm\frac{a^2}{b^2},\quad\frac{\alpha}{6}\times\frac{b^2}{a^2}=\pm1,$$

et $-\frac{\alpha}{6}\times\frac{b^2}{a^2}$ est le coefficient angulaire de MM'. Donc, s'il existait alors une hyperbole équilatère, passant par les points M, M', Q, Q', une droite MM' parallèle à l'une des deux asymptotes de l'hyperbole couperait cette courbe en deux points M, M', situés à distance finie, ce qui est, comme on sait, impossible. (G.)

sur la droite QQ′, lorsqu'on fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x+y=l$, nous remarquerons qu'en remplaçant μ par sa valeur l'équation de la droite QQ′ devient

$$(1)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\beta^2-\alpha^2}{a^2+b^2}=0.$$

La perpendiculaire à cette droite, menée par l'origine, a pour équation

$$(2)\qquad \alpha b^2 y+\beta a^2 x=0.$$

Le point P devant se trouver sur la droite représentée par l'équation $x+y=l$, on a

$$(3)\qquad \alpha+\beta=l.$$

L'équation du lieu cherché résulte de l'élimination de α et β entre les équations (1), (2) et (3).

Les deux dernières donnent

$$\alpha=-\frac{a^2 l x}{b^2 y-a^2 x}\quad\text{et}\quad \beta=\frac{b^2 l y}{b^2 y-a^2 x};$$

et, en remplaçant dans la première α, β par ces valeurs, et réduisant, on trouve

$$x^2+y^2-\frac{l}{a^2+b^2}(b^2 y+a^2 x)=0.$$

C'est l'équation du lieu cherché, qui est un cercle passant par l'origine des coordonnées [1].

---

[1] La valeur $\frac{\beta^2-\alpha^2}{a^2+b^2}$ de μ revient à $\frac{(\beta-\alpha)l}{a^2+b^2}$, puisque $\alpha+\beta=l$, et l'équation de la droite QQ′ peut s'écrire

$$\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}+\frac{(\beta-\alpha)l}{a^2+b^2}=0,$$

d'où

$$\alpha\left(\frac{x}{a^2}-\frac{l}{a^2+b^2}\right)+\beta\left(\frac{l}{a^2+b^2}-y\right)=0;$$

2° *Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes* MM′ *et* QQ′ est représenté par l'équation qui résulte de l'élimination de α et β entre les trois équations

$$(4)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0,$$

$$(5)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\beta^2-\alpha^2}{a^2+b^2}=0,$$

$$(6)\qquad \alpha+\beta=l.$$

La résolution des équations (4) et (6) par rapport à α et β donne

$$\alpha=\frac{1-\frac{ly}{b^2}}{\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}}\quad \text{et}\quad \beta=-\frac{1-\frac{lx}{a^2}}{\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}}.$$

En portant ces valeurs de α, β dans l'équation (5) et réduisant, on trouve

$$(7)\qquad 2(a^2+b^2)xy-\frac{1}{l}(a^2+b^2+l^2)(a^2y+b^2x)+2a^2b^2=0,$$

---

on satisfait à cette équation en posant

$$\frac{x}{a^2}-\frac{l}{a^2+b^2}=0,\quad \frac{l}{a^2+b^2}-y=0;$$

donc, quels que soient α et β, la droite QQ′ passe par un point fixe F dont les coordonnées x, y ont respectivement pour valeurs

$$\frac{la^2}{a^2+b^2},\quad \frac{lb^2}{a^2+b^2}.$$

Il s'ensuit que le lieu de la projection du centre C de l'ellipse sur la droite QQ′ est la circonférence décrite sur CF comme diamètre.

La droite MM′ est, de même, assujettie à passer par un point fixe F′, qui est, par rapport à l'ellipse, le pôle de la droite représentée par l'équation $x+y=l$, et dont les coordonnées sont

$$x=\frac{a^2}{l},\quad y=\frac{b^2}{l}.$$

Le lieu de la projection du centre C de l'ellipse sur la droite MM′ est la circonférence dont CF′ est un diamètre.

Ces deux circonférences sont tangentes l'une à l'autre au centre de l'ellipse. (G.)

équation qui représente une hyperbole équilatère, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

Démontrons maintenant que *ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l.*

L'équation (7) est vérifiée lorsque les deux suivantes le sont simultanément :

$$(a^2+b^2)xy+a^2b^2=0, \quad a^2y+b^2x=0.$$

Ces deux équations sont indépendantes de l ; le lieu passe donc, quel que soit l, par les deux points fixes, intersection des lignes que les deux équations représentent. En les résolvant, on obtiendra les coordonnées des deux points.

L'équation $a^2y+b^2x=0$ donne

$$y=-\frac{b^2}{a^2}x,$$

et, par suite, on a

$$-\frac{b^2}{a^2}(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0,$$

d'où

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad y=\mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

L'un des deux points a pour coordonnées $+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, et l'autre $-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $+\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Les valeurs de l pour lesquelles le lieu se réduit à deux droites s'obtiendront en exprimant que les coordonnées du centre vérifient l'équation du lieu.

En désignant par f'_x et f'_y les dérivées du premier membre de l'équation (7), on a

$$f'_x=2(a^2+b^2)y-\frac{b^2}{l}(a^2+b^2+l^2)=0,$$

$$f'_y=2(a^2+b^2)x-\frac{a^2}{l}(a^2+b^2+l^2)=0,$$

d'où

$$y = \frac{b^2(a^2+b^2+l^2)}{2l(a^2+b^2)}, \quad x = \frac{a^2(a^2+b^2+l^2)}{2l(a^2+b^2)}$$

et, par suite,

$$2(a^2+b^2)\frac{a^2b^2}{4l^2}\frac{(a^2+b^2+l^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + 2a^2b^2 - \frac{a^2b^2}{l^2}\frac{(a^2+b^2+l^2)^2}{(a^2+b^2)} = 0,$$

ce qui se réduit à

$$(a^2+b^2-l^2)^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad l = \pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Donc le lieu se réduit à deux droites, lorsque

$$l = +\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad l = -\sqrt{a^2+b^2}.$$

Pour déterminer les équations des deux droites dans chacun de ces deux cas, il suffit de remplacer l par ses valeurs dans les équations

$$y = \frac{b^2(a^2+b^2+l^2)}{2l(a^2+b^2)}, \quad x = \frac{a^2(a^2+b^2+l^2)}{2l(a^2+b^2)}.$$

La valeur $+\sqrt{a^2+b^2}$ de l donne

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Et pour $l = -\sqrt{a^2+b^2}$ les équations des deux droites deviennent

$$x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

LES ORGANISMES VIVANTS DE L'ATMOSPHÈRE; par M. *P. Miquel*, docteur ès sciences, docteur en Médecine,

chef du Service micrographique à l'Observatoire de Montsouris. Paris, Gauthier-Villars, 1883.

Depuis longtemps on avait l'intuition de germes microscopiques flottant dans l'atmosphère et donnant lieu, là où ils s'abattaient, soit à des fermentations variées, soit, dans un ordre plus compliqué, à des maladies diverses.

Sans remonter bien haut, on sait que Raspail, sur cette donnée, a édifié presque toute sa thérapeutique, mais c'est surtout de la grande lutte de Pasteur et de Pouchet sur la génération spontanée que datent, en France, les procédés scientifiques appliqués à cette étude.

L'air tient en suspension des particules inorganiques de toutes sortes, depuis les résidus de nos industries jusqu'à des globules de fer météorique. On y trouve des corps organisés très variés, à l'état de germes ou de développement complet, à l'état de débris.

Pour en faire l'étude, il faut d'abord les récolter, les examiner ensuite.

L'auteur décrit avec détails les appareils proposés pour les recueillir. Il passe ensuite aux procédés qui permettent d'en déterminer la nature.

Il faut reconnaître que parfois, dans cette recherche, le microscope serait trompeur. Il existe heureusement un mode d'expérimentation permettant de pallier l'insuffisance de nos instruments d'optique et de compter, sans le secours immédiat du microscope, les germes aériens des bactéries. Ce procédé, fécond en magnifiques résultats, c'est la culture des microbes, vulgarisée par M. Pasteur. La manipulation des liqueurs de culture, et comme corollaire des liqueurs stérilisées, tient donc une place importante dans le livre de M. Miquel.

L'auteur, passant à l'application des procédés décrits, expose le résultat de ses recherches particulières sur l'air de Paris, pris sur des points très différents, des hauteurs de Montsouris aux angles rentrants des hôpitaux et jusque dans la profondeur des égouts.

L'étude des antiseptiques s'ensuit tout naturellement.

Enfin, comme conclusion, M. Miquel fait ressortir les hautes destinées d'une science qui ne date pourtant que d'hier et le chemin parcouru en si peu de temps.

Le Livre de M. Miquel, comme je voudrais le faire ressortir

davantage dans cet aperçu, est d'un grand intérêt. A côté de travaux tout à fait personnels et très originaux, il réunit des notions et des documents qui n'avaient jamais été classés jusqu'à présent avec autant ordre.

Dr HARZÉ.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. QUESTIONS DYNAMIQUES. OBSERVATIONS SUR LE MOUVEMENT ET LE CHOC DES SYSTÈMES INVARIABLES; par *Paul Garrigou-Lagrange*. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55; 1883.

2. REVUE MENSUELLE D'ASTRONOMIE POPULAIRE, DE MÉTÉOROLOGIE ET DE PHYSIQUE DU GLOBE, donnant le tableau permanent des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'univers, publiée par *Camille Flammarion,* avec le concours des principaux astronomes français et étrangers. — Paris, Gauthier-Villars.

SOMMAIRE DU N° 6 (JUIN 1883).

La chaleur solaire et ses applications industrielles; par M. *A. Lepaute* (1 figure). — *La constitution intérieure de notre planète;* par M. *Edouard Roche,* correspondant de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier (1 figure). — *Phénomènes dus à l'action de l'atmosphère sur les étoiles filantes, les bolides et les aérolithes;* par M. *G.-A. Hirn,* correspondant de l'Institut, associé des Académies de Suède, de Belgique, etc. — *Distribution des petites planètes dans l'espace;* par M. le général *Parmentier.* — *Les étoiles* o^1 *et* o^2 *du Cygne, rectifications à apporter aux Catalogues et Cartes célestes;* par M. *C. Flammarion* (3 figures). — *Académie des Sciences.* Température à la surface du sol et jusqu'à 36m de profondeur pendant l'année 1882; par

MM. *Ed. Becquerel* et *Henri Becquerel*. — *Nouvelles de la Science*. Variétés : la grande tache solaire du mois d'avril 1882 (1 figure). Occultation de λ Gémeaux. Occultation de Saturne par la Lune (1 figure). Où commence lundi, où finit dimanche (1 figure). Curieuse étoile filante (1 figure). Origine des Uranolithes. Même question. Les saints de glace. Un nouveau journal scientifique. — *Observations astronomiques* (2 figures) et *Études sélénographiques* (1 figure); par M. *Gérigny*.

3. Sur diverses questions d'Arithmétique; par *Ernest Cesaro,* élève ingénieur des mines. — Bruxelles, F. Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique; 1883.

4. American Journal of Mathematics. Edited by *J.-J. Sylvester*. Published under the auspices of the Johns Hopkins University, vol. V, number 3. — Baltimore : press of Isaac Friedenwald; september 1882.

Contents.

5. On the motion of a projectile in a resisting medium; by *A.-G. Greenhill,* M. A., professor of Mathematics to the advanced class of artillery officers. — Woolwich : printed at the Royal Artillery Institution.

6. **Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche**, pubblicato da *B. Boncompagni,* socio ordinario dell'Accademia pontificia de'nuovi Lincei; socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo XIV, 1881.

Gennaio-Febbraio. — Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath, intitolato « Regule Abaci »; *B. Boncompagni.*

Regule Abaci.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Marzo. — Études sur Zarkali, astronome arabe du XIe siècle et ses Ouvrages; par *Maurice Steinschneider.*

Aprile. — Supplément à la bibliographie de Gergonne; par M. *Charles Henry.*

Sull' ottica degli Arabi, per Eilardo Wiedemann. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio. — Notice sur un manuscrit inédit de Claude Mydorge; par M. *Charles Henry.*

Extraits du *Traité de Géométrie* de Claude Mydorge (manuscrit *Fonds français,* n° 656, de la Bibliothèque nationale de Paris).

Giugno. — Alcune lettere inedite di Galileo Galilei, pubblicate ed illustrate da *Gilberto Govi.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Luglio. — Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet, Parisien; par *Aristide Marre.*

Agosto. — In memoriam dominici Chelini || collectanea || mathematica || nunc primum edita || cura et studio || L. Cremona et E. Beltrami ||. Opuscula conscripserunt, ecc. || Accessit imago ejusdem Chelini et testamentum Nic. Tartaleæ ||. Sumptibus || Ulrici Hoepli || Bibliopolae || Mediolani || Neapoli || Pisis || MDCCCLXXXI. In-8° di 468 pagine. — E. Narducci.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SETTEMBRE. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des Ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, sur les Sciences mathématiques et physiques avec leurs applications; par le Dr *D. Bierens de Haan.*

OTTOBRE. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des Ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, sur les Sciences mathématiques et physiques avec leurs applications; par le Dr *D. Bierens de Haan.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

NOVEMBRE. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des Ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, sur les Sciences mathématiques et physiques avec leurs applications; par le Dr *D. Bierens de Haan.* (Continuazione.)

Sulla storia delle Scienze naturali, presso gli Arabi. Pesi specifici; del Dr *Eilarde Wiedemann.* Traduzione del Dr Alfonso Sparagna.

DICEMBRE. — Notice sur un Ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham; par *Maurice Steinschneider.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1410

(voir 3e série, t. I, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donné un contour polygonal inscrit dans une parabole et tel que les projections de ses côtés sur la directrice soient égales, on mène par chacun de ses sommets une parallèle P *à l'axe de la parabole, puis on prolonge tous les côtés du contour dans le même*

sens jusqu'à la première P *qu'ils rencontrent. Tous les segments ainsi déterminés sur les lignes* P *sont égaux.*

(D'OCAGNE.)

Soient

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole, k la projection de chaque côté du contour sur la directrice; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées de trois sommets consécutifs. L'équation de la droite qui joint les deux derniers est

$$(y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y + x_3 y_2 - x_2 y_3 = 0$$

ou, en remplaçant x_2 et x_3 par $\frac{y_2^2}{2p}$ et $\frac{y_3^2}{2p}$ et divisant par $y_3 - y_2$,

$$x - \frac{y_2 + y_3}{2p} y + \frac{y_2 y_3}{2p} = 0;$$

d'où l'on tire, pour l'abscisse du point où elle rencontre la droite P passant par x_1, y_1,

$$x = \frac{1}{2p}(y_1 y_2 + y_1 y_3 - y_2 y_3)$$

et, pour le segment compris entre ce point et la parabole,

$$x_1 - x = \frac{1}{2p}(y_1^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2 y_3).$$

En remplaçant y_2 et y_3 par leurs valeurs $y_1 + k$, $y_1 + 2k$ (en supposant y croissant avec l'indice), il vient

$$x_1 - x = \frac{k^2}{p},$$

valeur indépendante de l'indice.

Si les côtés étaient prolongés dans le sens opposé, il suffirait de changer le signe de k, ce qui ne modifie pas le résultat.

Question 1413

(voir 3e série, t. I, p. 383);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Si, par un point quelconque M *de la sécante commune à deux coniques homothétiques, on mène une droite quelconque* AB *coupant la première en* A *et* B, *la seconde en* A′ *et* B′, *les produits* $MA \times MB$ *et* $MA' \times MB'$ *seront égaux.* (P. BARBARIN.)

Menons dans les coniques les diamètres COD, C′O′D′ parallèles à la sécante commune IMK, et les diamètres EOF, E′O′F′ parallèles à la droite variable AB (¹). D'après le théorème de Newton, on a

$$\frac{MA \times MB}{MI \times MK} = \frac{OE \times OF}{OC \times OD} = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OC}^2};$$

de même

$$\frac{MA' \times MB'}{MI \times MK} = \frac{\overline{O'E'}^2}{\overline{O'C'}^2}.$$

Or, les coniques étant homothétiques, on a

$$\frac{OE}{OC} = \frac{O'E'}{O'C'};$$

donc

$$MA \times MB = MA' \times MB'.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Berthelet, élève au Lycée de Moulins; Adrien Paluz, élève à l'École Polytechnique de Zurich.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 1418

(voir 3ᵉ série, t. I, p. 431);

PAR M. LEZ.

On donne une ellipse de demi-axes OA, OB *et deux circonférences concentriques à l'ellipse, et de rayons* r, R; $r = \text{OB}$. *Une droite issue du centre* O, *commun aux trois courbes, coupe les circonférences* r, R *en des points* C, D *par lesquels on mène des parallèles à* OA *dirigées dans le sens* OA. *La première rencontre l'ellipse au point* E, *la seconde est rencontrée en un point* F *par la normale à l'ellipse en* E; *trouver le lieu géométrique du point* F. (E. LEBON.)

Une droite $y = mx$ issue du centre commun O rencontre les cercles $x^2 + y^2 = r^2$ et $x^2 + y^2 = \text{R}^2$ en des points C et D ayant pour ordonnées $y = \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}$, $y = \frac{m\text{R}}{\sqrt{1+m^2}}$.

La parallèle CE à l'axe focal rencontre l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

au point E ayant pour abscisse

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2(1+m^2) - r^2m^2}{1+m^2}}.$$

Les coordonnées de ce point E deviennent

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}, \quad y = \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}},$$

quand $r = b = \text{OB}$.

La normale en E, représentée par

$$y - \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{am}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right),$$

rencontre la droite DF, où

$$(1) \qquad y = \frac{mR}{\sqrt{1+m^2}},$$

en un point F ayant pour abscisse

$$(2) \qquad x = \frac{bR + a^2 - b^2}{a\sqrt{1+m^2}} = \frac{bR + c^2}{a\sqrt{1+m^2}}.$$

Éliminant la variable m entre les équations (1) et (2), on aura l'équation du lieu décrit par le point F ; on obtient ainsi une ellipse

$$\frac{a^2x^2}{(c^2+bR)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

concentrique à l'ellipse donnée ([1]).

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Léon Rousset, élève du Lycée de Lyon; et par un anonyme.

Question 1421

(voir 3e série, t. I, p. 432);

PAR M. VICTOR DE STRÉKALOF, à Saint-Pétersbourg.

Soient AOD, BOE, COF *les trois hauteurs et* G *le centre de gravité d'un triangle* ABC; *démontrer que les cercles circonscrits aux triangles* AGD, BGE, CGF *se coupent en un second point qui est l'intersection de la droite* OG, *et de l'axe radical du cercle circonscrit au triangle* ABC, *et du cercle des neuf points de ce triangle.* (Rev. G. RICHARDSON, M.-A.)

On sait que les polaires d'un même point, relatives aux trois angles d'un triangle, vont rencontrer respecti-

---

([1]) Cette ellipse devient un cercle lorsque $R = a + b$.

vement les côtés opposés en trois points situés en ligne droite (CHASLES, *Géométrie supérieure*, 2e édit., 1880, p. 257). De plus, si ce point est le point O de concours des hauteurs du triangle ABC, la droite mentionnée sera l'axe radical du cercle circonscrit au triangle et du cercle des neuf points de ce triangle.

En effet, soient F' le point de rencontre du côté AB avec la polaire de O, relative à l'angle opposé C, et C' le milieu de AB (1). On a

$$(1)\qquad F'B.FA = F'A.BF;$$

d'où l'on tire successivement

$$F'B(BA - BF) = (F'B + BA).BF,$$
$$F'B.BA = 2F'B.BF + 2.BC'.BF. = 2(F'B.BF + BC'.BF);$$
$$\tfrac{1}{2}F'B.BA = F'B.BF + BC'.BF.;$$
$$F'B.BA = \tfrac{1}{2}F'B.BA + F'B.BF. + BC'.BF.;$$
$$F'B.BA = F'B.BC' + F'B.BF + BC'.BF;$$

et, en ajoutant $F'B^2$ de part et d'autre, on aura

$$F'B(F'B + BA) = F'B(F'B + BC') + BF(F'B + BC'),$$
$$= (F'B + BF)(F'B + BC'),$$

d'où

$$(2)\qquad F'B.F'A = F'F.F'C',$$

ce qui veut dire que le point F' est situé sur l'axe radical des deux circonférences considérées (2). On verra de la même manière que le point D' de rencontre du côté BC avec la polaire de O, relative à l'angle A, est sur la même

(1) Le lecteur est prié de faire la figure. Le point F' est l'intersection des droites ED, AB prolongées; les points F', F sont conjugués harmoniques de A, B.

(2) Car les points A, B appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC, et les points F, C' à la circonférence des neuf points de ce triangle.

droite; donc les polaires du point O, relatives aux trois angles du triangle ABC, rencontrent respectivement les côtés opposés en des points qui appartiennent à l'axe radical des deux circonférences.

Pour construire l'axe radical, il suffit de prolonger la droite ED jusqu'à la rencontre de AB au point F′ et d'abaisser de F′ une perpendiculaire F′R sur la droite OG, qui est, comme on sait, la ligne des centres du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

Cela posé, on a, d'après la relation (2),

$$F'F(F'F + FC') = (F'F - FB)(F'F + FA),$$

d'où

$$F'F.FC' = F'F.FA - FB.F'A;$$

mais, d'après la relation (1),

$$FB.F'A = F'B.FA.;$$

donc

$$F'F.FC' = F'F.FA - F'B.FA = FA(F'F + F'B),$$

d'où

$$(3) \qquad F'F.FC' = FA.FB.$$

Or, les triangles semblables ACF, BOF donnent

$$FA.FB = CF.OF;$$

donc

$$F'F.FC' = CF.OF, \quad \text{ou} \quad \frac{F'F.}{OF} = \frac{CF}{FC'}.$$

Cette dernière égalité montre que les triangles rectangles F′FO, CFC′ sont semblables, et, par conséquent, l'angle OF′F = l'angle FCC′. Mais le quadrilatère OFF′R étant inscriptible, les angles OF′F, ORF sont égaux entre eux, comme inscrits dans un même segment du cercle décrit sur OF′ comme diamètre. Donc l'angle

$$ORF = FCC'. = FCG.$$

Il s'ensuit que les quatre points C, G, F, R appartiennent

à un même cercle; donc la circonférence circonscrite au triangle CGF passe par le point R de rencontre de la droite OG et de l'axe radical F'R dont il s'agit.

On démontrerait de même que les cercles circonscrits aux triangles AGD, BGE passent par le point R : le théorème proposé est donc démontré.

Note. — M. Moret-Blanc a donné une démonstration fondée sur les formules de la Géométrie analytique.

Question 1422

(voir 3e série, t. I, p. 432);

PAR M. ROMERO, à Madrid.

Tout nombre dont le carré se compose des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers dont deux, au moins, sont consécutifs. (G.)

Les solutions en nombres entiers de l'équation

$$X^2 = Y^2 + Z^2 \tag{1}$$

sont données par les formules

$$X = a^2 + b^2, \quad Y = a^2 - b^2, \quad Z = 2ab,$$

où a et b représentent des nombres entiers.

Si les nombres Y, Z ont une différence égale à l'unité, on a

$$a^2 - b^2 - 2ab = \pm 1.$$

I. En prenant le signe + devant 1, il vient

$$(a + b)^2 = 2a^2 - 1,$$

c'est-à-dire que $a + b$ et a sont une solution de l'équation

$$x^2 = 2y^2 - 1. \tag{2}$$

Posons

$$x = a + b \quad \text{et} \quad y = a;$$

l'équation (2) peut être mise sous la forme

$$y^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2.$$

Le nombre $\frac{x-1}{2}$ est entier, puisque x est impair.

On a, par suite,

$$(3) \qquad X = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2 + (x-y)^2 \quad (^1).$$

II. En prenant le signe —, la relation

$$a^2 - b^2 - 2ab = \pm 1$$

donne

$$(a-b)^2 = 2b^2 - 1$$

et, en posant $a - b = x$ et $b = y$,

$$x^2 = 2y^2 - 1,$$

$$y^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2,$$

d'où

$$(4) \qquad X = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2 + (x+y)^2 \quad (^2).$$

Les relations (3) et (4) démontrent la proposition.

Note. — Autres démonstrations de MM. Fauquembergue, C. Chabanel, F. Borletti.

---

(1) Ou, en remplaçant x et y par leurs valeurs $a + b$ et a,

$$X = \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-1}{2} + 1\right)^2 + b^2.$$

(2) $$X = \left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b-1}{2} + 1\right)^2 + a^2.$$

Question 1425

(voir 3e série, t. I, p. 480);

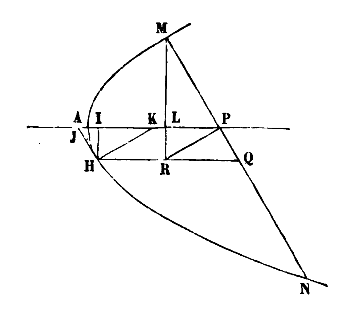
PAR M. N. GOFFART.

La normale en M *à une parabole rencontre cette courbe en un second point* N *et son axe en* P. *Par le point* Q *milieu de* MN, *on mène une parallèle à l'axe de la parabole, et du point* M *on abaisse la perpendiculaire* MR *sur cette droite :*

1° *Démontrer que* PR *est perpendiculaire à* MN;

2° *Trouver le lieu géométrique du point* R *lorsque le point* M *se déplace sur la parabole.* (CHAMBON.)

1° La parallèle QH à l'axe est le diamètre conjugué à la direction MN. Donc la tangente HJ au point H, est parallèle à MN, et la normale en H est perpendiculaire à MN. Or les sous-normales IK et LP sont égales au paramètre p. Donc les triangles rectangles RLP et HIK



sont égaux; par suite, RP est parallèle à HK, c'est-à-dire perpendiculaire à MN.

2° Dans le triangle rectangle MPR, on a

$$\text{(1)} \qquad \text{LP}^2 = \text{ML}.\text{LR}.$$

Or

$$\text{ML}^2 = 2p.\text{AL}.$$

Donc

$$LP^4 = 2p.AL.LR^2;$$

et si l'on fait

$$AL = x, \quad LR^2 = y^2,$$

on aura pour *l'équation du lieu du point* R

$$(2) \qquad y^2 = \frac{p^3}{2x}.$$

La formule (1) montre que le paramètre de la parabole est moyen proportionnel entre les ordonnées de la parabole et du lieu (2), correspondantes à la même abscisse.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Rénoy, à Bordeaux; Choudadow, à Stawropol, au Caucase; Ch. Laurans, élève au lycée de Lyon; A. Percerou, élève au lycée de Besançon; L. Rousset, élève au lycée de Lyon; Giat et Berthelet, élèves au lycée de Moulins; Ch. Robinel et U. Génin, élèves au lycée de Bar-le-Duc; A. Barès, élève au lycée de Toulouse; et par un anonyme.

Question 1434

(voir 2e série, t. II, p. 144);

PAR M. GIAT,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins
(classe de M. Marchand).

L'angle de deux hyperboles équilatères, concentriques, est double de l'angle de leurs asymptotes.

(E. CESARO.)

Soient OA, OB, et OA', OB' les asymptotes des deux hyperboles; P un de leurs points d'intersection; PA, PA' leurs tangentes en ce point, qui rencontrent respectivement en A et A' les asymptotes OA, OA' dont l'angle A'OA est aigu ([1]).

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que le segment de tangente, compris entre les deux asymptotes d'une hyperbole, est partagé en deux parties égales au point de contact. Les hyperboles considérées étant équilatères, on en conclut facilement que $PA = PO = PA'$. Il en résulte que les trois points O, A, A' sont sur une circonférence dont P est le centre. Or, dans cette circonférence, l'angle APA' a pour mesure l'arc AA', tandis que l'angle inscrit AOA' a pour mesure la moitié de cet arc. Donc

$$APA' = 2\,AOA'.$$

C. Q. F. D.

Note. — M. Berthelet, élève du lycée de Moulins, a donné, de même, une démonstration géométrique très simple de la proposition énoncée.

La même question a été résolue au moyen de calculs par MM. E. Barisien, lieutenant au 141e d'infanterie, en Algérie; A. Goffart; C. Whiteken, élève à l'université de Pensylvanie, à Philadelphie; et par un anonyme.

QUESTIONS.

1451. Démontrer que, si les deux racines de l'équation

$$z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) = 0$$

sont entières, l'équation indéterminée

$$\text{(A)} \qquad x^3 + k = y^2,$$

dans laquelle on a pris

$$k = [(\alpha+1)^3 - (\beta+1)^2]z,$$

admet toujours une solution entière.

Exemples.

1° Pour $\alpha = a^2$,

$$\beta = \pm a^3,$$

d'où

$$z = 3a^2, \quad k = 3a^4(3a^2 \mp 2a + 3),$$

l'équation (A) est vérifiée par

$$x = -2a^2, \quad y = a^2(a \mp 3).$$

2° Pour $\alpha = 2$,

$$\beta = \pm 1,$$

d'où

$$z' = 7, \quad z'' = -1.$$

Les équations

$$x^3 + 161 = y^2, \quad x^3 - 23 = y^2;$$
$$x^3 + 189 = y^2, \quad x^3 - 27 = y^2$$

admettent respectivement les solutions

$$-5^3 + 161 = 6^2, \quad 3^3 - 23 = 2^2;$$
$$-5^3 + 189 = 8^2, \quad 3^3 - 27 = 0.$$

3° Pour $\alpha = 32$,

$$\beta = \pm 64,$$

d'où

$$z' = 224, \quad z'' = -128;$$

on a les résultats

$$-192^3 + 7\,103\,488 = 160^2, \quad 160^3 - 4\,059\,136 = 192^2;$$
$$-192^3 + 7\,160\,832 = 288^2, \quad 160^3 - 4\,091\,904 = 64^2,$$

équivalant, respectivement, à

$$-48^3 + 110\,992 = 20^2, \quad 10^3 - 991 = 3^2;$$
$$-48^3 + 111\,888 = 36^2, \quad 10^3 - 999 = 1^2.$$

Nota. — L'équation en z, mise sous la forme

$$\alpha^3 + (3\alpha - z)z = \beta^2$$

et supposée vérifiée par des valeurs entières de α, β, z, constitue par elle-même une solution entière de (A), pour une infinité de valeurs de k, comprises dans l'expression $(3\alpha - z)z$.

Le résultat le plus simple à obtenir par cette voie consiste dans l'égalité évidente

$$2^3 - 7 = 1^2.$$

(S. Realis.)

1452. L'expression

$$8\beta - 3(\alpha^2 + 2\alpha) + 1$$

se réduisant à un carré pour des valeurs entières de α et β, l'équation indéterminée

$$x^3 - (\alpha^3 - \beta^2) = y^2$$

est résoluble en nombres entiers x, y, indépendamment de la solution immédiate

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Exemples.

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, valeurs satisfaisant à la condition indiquée, l'équation devient

$$x^3 + 1 = y^2,$$

et admet les solutions

$$x = -1, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 2, \quad y = 3,$$

en outre de la solution immédiate

$$x = 0, \quad y = 1.$$

Pour $\alpha = -2$, $\beta = \frac{a^2 + a}{2}$, l'équation

$$x^3 + \left(\frac{a^2 + a}{2}\right)^2 + 8 = y^2$$

admet les solutions

$$x = -a + 1, \qquad x = a + 2,$$
$$v = \frac{a^2 - a}{2} + 3, \quad y = \frac{a^2 + 3a}{2} + 4,$$

en outre de la solution immédiate

$$x = -2, \quad y = \frac{a^2 + a}{2}.$$

(S. Réalis.)

1453. Le nombre $\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme des carrés de deux nombres entiers.

(CATALAN.)

1454. On donne une sphère et un point dans son intérieur; de ce point on mène trois cordes telles que le pôle du plan de deux quelconques d'entre elles soit sur la troisième : la somme des inverses des carrés de ces cordes est constante. (MANNHEIM.)

1455. On considère deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites; le lieu des foyers des paraboles tangentes à la fois aux deux droites et à la circonférence est une circonférence tangente aux deux droites. (WEIL.)

1456. Soient a, a'; b, b'; c, c' les points d'intersection d'une conique et des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC : démontrer que les six droites Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une autre conique.

(H. SCHROETER.)

1457. Une hyperbole est tangente aux axes d'une ellipse, et les asymptotes de l'hyperbole sont tangentes à l'ellipse; prouver que le centre de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

(WOLSTENHOLME.)

1458. Construire une parabole tangente à une circonférence donnée, connaissant l'axe et le paramètre de la parabole. (A.)

1459. Le cube d'un nombre entier autre que l'unité ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES DU FOYER D'UNE CONIQUE A QUATRE POINTS OU A QUATRE TANGENTES

[SUITE (1)];

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur au lycée de Carcassonne.

II. — FOYERS DE L'HYPERBOLE.

17. Nous avons vu (théorème II) que, si un quadrilatère ABCD est inscrit dans une hyperbole, de telle sorte qu'il y ait deux points sur chaque branche, on a la relation

$$AD - A_2D_2 = A_1D_1 - A_3D_3,$$

$A, A_1, \ldots$ ayant la même signification que dans le cas de l'ellipse.

Si le quadrilatère devient un parallélogramme, on a

$$A = A_1 = A_2 = A_3$$

et, par suite,

$$D - D_2 = D_1 - D_3.$$

Ainsi :

THÉORÈME XII. — *Si un parallélogramme est inscrit dans une hyperbole, la différence des distances d'un foyer à deux sommets opposés est égale à la différence des distances aux deux autres sommets.*

Or, si un parallélogramme est inscrit dans une hyperbole, les diagonales sont des diamètres. De là, cet autre énoncé :

La différence des distances d'un foyer aux extrémités d un diamètre de l'hyperbole est constante.

(1) *Voir* même Tome, p. 193.

Disons encore que cette propriété est évidente quand on part de la définition géométrique de l'hyperbole.

Remarquons maintenant que, si F est un foyer, le point F', symétrique par rapport au centre, est aussi un foyer. Soient alors F et F' ces deux foyers et MM' un diamètre (*fig.* 9). On a

$$FM' - FM = K,$$

et, par suite,

$$MF' - MF = K.$$

D'où :

THÉORÈME XIII. — *La différence des distances d'un point quelconque de l'hyperbole aux deux foyers est constante.*

Fig. 9.

Partant de là, on pourra raisonner comme pour l'ellipse et prouver :

1° *Que la tangente en un point fait des angles égaux avec les rayons vecteurs allant des foyers au point de contact;*

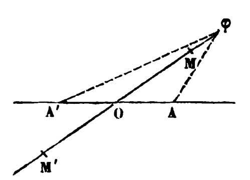
2° *Que les foyers doivent être sur l'un des axes, car ils doivent être sur un diamètre normal à la courbe.*

Ils ne peuvent, d'ailleurs, pas être sur l'axe non transverse : ils seront donc sur l'axe transverse.

18. On peut arriver plus directement aux mêmes con-

clusions. Soit, en effet, φ un foyer situé sur un diamètre

Fig. 10.



quelconque MM' de l'hyperbole (*fig.* 10), et soit AA' l'axe transverse.

La différence des distances aux extrémités d'un diamètre étant constante, on doit avoir

$$MM' = \varphi M' - \varphi M = \varphi A' - \varphi A.$$

Or, dans le triangle $A\varphi A'$, on a

$$AA' > \varphi A' - \varphi A,$$

c'est-à-dire

$$AA' > MM',$$

ce qui est impossible, puisque AA' est le diamètre minimum : donc les foyers sont sur l'axe transverse, et la différence constante est égale à cet axe.

Si alors la longueur de l'axe non transverse est donnée, on construira les foyers par le procédé ordinaire.

19. Supposons que l'on donne un diamètre quelconque en grandeur et en direction, et que l'on donne aussi la grandeur et la position de l'axe transverse : il est facile de construire les foyers.

Désignons par $2a$ l'axe transverse et par MM' le diamètre; F étant un foyer, on aura

$$FM - FM' = 2a;$$

par conséquent l'hyperbole, qui a pour foyers M et M'

et pour longueur de l'axe transverse $2a$, passe par le point F.

Le problème précédent est alors ramené à trouver les points de rencontre d'une droite avec une hyperbole, problème que l'on sait résoudre.

Remarque. — On traiterait d'une manière analogue le problème correspondant pour l'ellipse.

III. — Foyer de la parabole.

20. Nous avons vu précédemment que si D_1, D_2, D_3 sont les distances de trois points d'une parabole au foyer, on a (théorème V)

$$d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) \\ + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) = 4S^2,$$

b, c, d désignant les côtés du triangle formé par les trois points et S la surface de ce triangle.

Supposons $D_1 = D_2$. La relation précédente devient

$$d^2(D_3 - D_2)^2 = 4S^2 \quad \text{ou} \quad 2S = \pm d(D_3 - D_2).$$

On prendra le signe + si $D_3 > D_2$, le signe — dans le cas contraire.

Or, si l'on désigne par h la hauteur correspondant au côté d, on a

$$2S = dh$$

et, par suite,

$$h = \pm (D_3 - D_2).$$

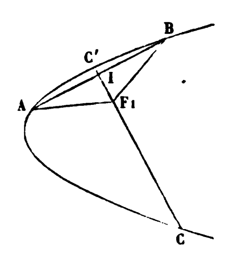
Ainsi :

Théorème XIV. — *Si deux points d'une parabole sont équidistants du foyer et si, par un troisième point quelconque, on mène la perpendiculaire sur la droite qui joint les deux premiers, cette perpendiculaire est égale à la différence des distances du foyer au troisième point et à l'un des deux autres.*

21. C'est à l'aide de cette propriété que nous allons déterminer le foyer de la parabole. Démontrons d'abord que le foyer doit être sur l'axe.

Première démonstration. — Supposons que le foyer soit un point quelconque F_1 (*fig.* 11) pris à l'intérieur

Fig. 11.



de la parabole : nous avons prouvé qu'il ne peut être à l'extérieur.

Soient A et B deux points équidistants du point F_1. Menons F_1I perpendiculaire sur le milieu de AB : cette perpendiculaire rencontrera la parabole en deux points C et C', puisque CC' n'est pas l'axe. D'après le théorème XIV, on doit avoir

$$CI = CF_1 - AF_1,$$

ce qui est impossible, à moins que le point C ne soit à l'infini et alors CC' serait l'axe, et le foyer serait sur l'axe.

Deuxième démonstration. — Soient F_1 le foyer, A et B deux points équidistants de F_1, M un point quelconque de la parabole et MP la perpendiculaire abaissée de ce point sur AB (*fig.* 12). On devra avoir

$$MP = MF_1 - AF_1.$$

Pour un autre point quelconque M', on devrait avoir

aussi

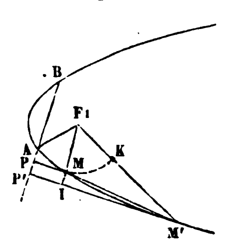
$$M'P' = M'F_1 - AF_1.$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$M'P' - MP = M'F_1 - MF_1.$$

Menons MI parallèle à AB et décrivons l'arc MK du

Fig. 12.



point F_1 comme centre. L'égalité précédente montre que

$$M'I = M'K.$$

Partant de là, on démontrera par le procédé ordinaire que la tangente à la courbe au point M est également inclinée sur MP et sur MF_1.

Or A et B sont deux points quelconques équidistants de F_1 ; pour un autre couple de points A′ et B′ équidistants de F_1, on devra avoir la même relation : ce qui exige évidemment que AB et A′B′ soient parallèles. Mais alors la perpendiculaire abaissée du foyer sur AB est un axe de symétrie et, par suite, le foyer est sur l'axe.

Il nous reste à déterminer sa position.

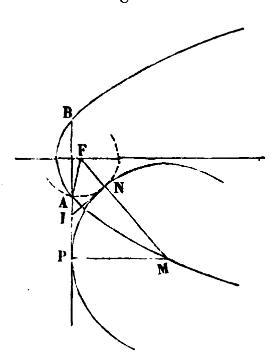
22. Soient F le foyer supposé connu et AB une corde perpendiculaire à l'axe (*fig.* 13).

Prenons un point quelconque M et menons MP perpendiculaire à AB. On aura

$$MP = MF - AF.$$

Du point M comme centre décrivons la circonférence

Fig. 13.



de rayon MP et joignons M et F. On aura alors

$$FN = AF.$$

On voit facilement, d'après cela, que la détermination du foyer est ramenée au problème suivant :

Décrire une circonférence passant par deux points donnés A *et* B *et tangente à une circonférence donnée.*

On sait que ce problème se ramène lui-même à la détermination du point I, et il est à remarquer que la construction donne un second foyer à l'infini, puisque MP est parallèle à l'axe.

Remarque. — Nous n'avons pas parlé de la détermination des directrices, parce que, les foyers étant déterminés, les directrices s'en déduisent immédiatement.

23. En dehors de la détermination des foyers, les théorèmes I et II peuvent recevoir d'autres applications.

Considérons, par exemple, la relation

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0.$$

Désignons par δ, δ_1, δ_2, δ_3 les distances respectives des

quatre points à la directrice. On a

$$D = K\delta,\quad D_1 = K\delta_1,\quad D_2 = K\delta_2,\quad D_3 = K\delta_3.$$

En remplaçant, il vient, après la suppression du facteur K,

$$A\delta - A_1\delta_1 + A_2\delta_2 - A_3\delta_3 = 0$$

ou

$$(14)\qquad A\delta + A_2\delta_2 = A_1\delta_1 + A_3\delta_3.$$

Remarquons maintenant que les quatre points considérés ont une position indépendante à l'égard de la directrice. Rien dans la relation (14) n'indique que les quatre points appartiennent à une conique ayant pour directrice la droite considérée. En d'autres termes, l'égalité (14) a lieu pour un quadrilatère convexe quelconque situé du même côté par rapport à une droite.

Ainsi :

Théorème XV. — *Étant donnés un quadrilatère convexe plan et une droite située dans son plan et ne rencontrant pas sa surface, si l'on multiplie la distance de chaque sommet à la droite par l'aire du triangle formé par les trois autres, la somme des produits correspondant à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres.*

On voit sans peine quels seraient les théorèmes analogues dans les autres cas.

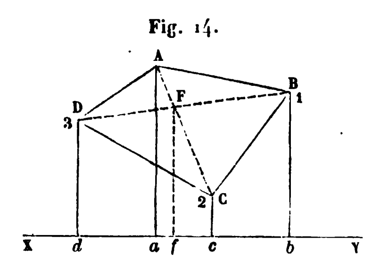
On voit aussi sans peine comment on pourrait comprendre les divers énoncés en un seul.

24. Enfin on peut arriver directement aux mêmes conclusions. Considérons, par exemple, le quadrilatère convexe ABCD et l'axe XY (*fig.* 14).

Imaginons que l'on applique en A une force perpendiculaire au plan du quadrilatère et égale à l'aire du

triangle BCD; au point B une force égale à l'aire du triangle ACD, etc. Considérons d'abord les forces A_1 et

Fig. 14.



A_2 appliquées en A et C. Le théorème des moments, appliqué à ces forces, donne

$$A \times Aa + A_2 \times Cc = (A + A_2)z,$$

en désignant par z la distance à XY du point d'application de la résultante.

Or les deux triangles BCD et ABD, ayant même base, sont entre eux comme les longueurs CF et AF, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{A}{A_2} = \frac{CF}{AF}.$$

Le point F est donc le point d'application de la résultante, et $z = Ff$; par suite,

$$A \times Aa + A_2 \times Cc = (A + A_2)Ff.$$

On aurait de même

$$A_1 \times Bb + A_3 \times Dd = (A + A_2)Ff;$$

d'où

$$A \times Aa + A_2 \times Cc = A_1 \times Bb + A_3 \times Dd.$$

25. Les résultats précédents peuvent être formulés, d'une manière générale, comme il suit :

Théorème XVI. — *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *n points appartenant à une conique,* $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ *les dis-*

tances respectives au foyer; si l'on a la relation homogène $f(D_1, D_2, \ldots, D_n) = 0$, *on aura aussi*

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0,$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *désignant les distances respectives de* n *points quelconques d'un plan à une droite quelconque de ce plan.*

Désignons en effet par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les distances des n points considérés à la directrice correspondante. On aura

$$D_1 = K\delta_1, \quad D_2 = K\delta_2, \quad \ldots, \quad D_n = K\delta_n,$$

$$(15) \qquad f(D_1, D_2, \ldots, D_n) = K^p f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0,$$

p désignant le degré d'homogénéité.

Or, dans cette équation, la conique n'intervient que par la quantité constante K qui n'est pas nulle et qui disparaît. On a donc, pour tout système de n points et par rapport à une droite quelconque du plan des n points,

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0.$$

La réciproque est évidente.

26. Théorème XVII. — Relation entre quatre coniques circonscrites a un quadrilatère. — *Lorsque quatre coniques sont circonscrites à un quadrilatère, il y a une relation homogène et du quatrième degré entre les distances de quatre foyers aux sommets du quadrilatère.*

Soit ABCD le quadrilatère. Nous désignerons les sommets par (1), (2), (3), (4). Soit C_i une conique circonscrite au quadrilatère et dont les distances d'un foyer aux sommets sont x_i, y_i, z_i, u_i.

Supposons que i varie de 0 à 3, et que les quatre coniques obtenues soient du même genre. On aura les

quatre équations

$$(16)\quad \begin{cases} A x - A_1 y + A_2 z - A_3 u = 0, \\ A x_1 - A_1 y_1 + A_2 z_1 - A_3 u_1 = 0, \\ A x_2 - A_1 y_2 + A_2 z_2 - A_3 u_2 = 0, \\ A x_3 - A_1 y_3 + A_2 z_3 - A_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

L'élimination de A, A_1, A_2, A_3 donne

$$(17)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation cherchée. Elle donne le lieu géométrique des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère. La recherche de ce lieu aurait présenté bien plus de difficultés si elle avait été faite autrement. Nous nous proposons de revenir plus tard sur cette équation, s'il y a lieu.

En particulier, si l'une des coniques est un cercle, par exemple C_3, on aura

$$x_3 = y_3 = z_3 = u_3,$$

et la relation (17) devient

$$(18)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation (1) dans laquelle les coordonnées des sommets du quadrilatère ont été remplacées par les distances de ces sommets aux foyers de C_1 et de C_2.

(*A suivre.*)

DÉTERMINATION ET CONSTRUCTION NOUVELLE DU CERCLE QUI COUPE TROIS CERCLES SOUS TROIS ANGLES DONNÉS ET DE LA SPHÈRE QUI COUPE QUATRE SPHÈRES SOUS DES ANGLES DONNÉS ;

PAR M. LAQUIÈRE.

Dans un récent article, nous avons donné deux démonstrations d'un théorème permettant de construire le cercle qui en coupe trois autres sous trois angles respectivement égaux à trois angles différents donnés, aussi simplement que le cercle isogonal, ou que le cercle tangent aux trois.

La démonstration qui suit, beaucoup plus simple, met en évidence une construction nouvelle beaucoup plus simple encore. Elle nous a fait découvrir un beau théorème de Géométrie à trois dimensions qui n'a peut-être pas encore été remarqué, bien qu'il soit d'une extrême simplicité.

Nous donnons, *in extenso,* la démonstration en question, vu son peu de longueur.

Soit R le rayon d'un cercle variable Γ coupant sous deux angles respectifs constants α_1 et α_2 deux cercles fixes c_1, c_2 de rayons r_1, r_2.

Soient de plus

$$\lambda_1 = -2r_1 \cos\alpha_1, \quad \lambda_2 = -2r_2 \cos\lambda_2$$

les cordes interceptées par les cercles c_1 et c_2 sur les rayons du cercle Γ aboutissant aux points d'intersection; les distances tangentielles γ_1 et γ_2 du centre du cercle Γ aux cercles c_1 et c_2 donneront les relations simultanées

$$\gamma_1^2 = R^2 + R\lambda_1,$$
$$\gamma_2^2 = R^2 + R\lambda_2;$$

d'où

(1) $$R^2(\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_1 \gamma_2^2 - \lambda_2 \gamma_1^2,$$

et de même

$$R(\lambda_1 - \lambda_2) = \gamma_1^2 - \gamma_2^2.$$

Éliminant R,

(2) $$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 \gamma_2^2 - \lambda_2 \gamma_1^2) = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2.$$

L'équation (2) exprime que le lieu du centre du cercle variable Γ est une conique V ayant un double contact avec le cercle Ω

(3) $$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

aux points d'intersection des deux cercles c_1, c_2 avec lesquels il a même axe radical.

L'équation (1) exprime de son côté que la puissance du centre du cercle variable Γ par rapport au cercle Ω est égale à R^2, et par suite qu'il lui est orthogonal ([1]).

Le cercle Ω est facile à construire, puisqu'il passe par les points d'intersection des deux cercles c_1, c_2 et par les points des tangentes communes dont les distances aux points de contact sont dans le rapport $\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$.

L'équation (3) exprime que le cercle Ω partage l'angle des deux cercles c_1 et c_2, de manière à faire avec eux deux angles respectifs ω_1 et ω_2 définis par la relation

(4) $$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2},$$

comme on le voit immédiatement en prenant par rap-

([1]) Le cercle variable Γ a donc pour enveloppe les deux cercles passant aux points d'intersection de c_1 et c_2, anallagmatique du quatrième ordre à deux points doubles.

port aux deux cercles c_1 et c_2 la puissance du point du cercle Ω infiniment voisin du point où les trois cercles se rencontrent.

La relation indiquée pour les cercles subsiste pour les sphères représentées par leurs cercles équateurs du plan des trois centres. La série des sphères Σ coupant s_1 et s_2 sous les angles constants α_1 et α_2 est donc orthogonale à la sphère fixe (3) qui passe par leur cercle d'intersection et les coupe sous les angles définis par la relation (4). Leur centre est sur une surface du second ordre de révolution autour de la ligne des centres des sphères s_1 et s_2 et circonscrite suivant leur ligne d'intersection à la sphère (3) que toutes les sphères Σ coupent orthogonalement.

Soit à trouver le cercle coupant trois cercles donnés sous trois angles donnés. Les remarques ci-dessus permettront de le déterminer des deux manières suivantes :

1° En le considérant comme le cercle orthogonal aux trois cercles Ω''', Ω', Ω'' obtenus, ainsi qu'il vient d'être dit, avec chaque groupe de deux cercles c_1, c_2, c_3 accouplés;

2° En déterminant son centre comme intersection des deux coniques V obtenues dans deux de ces combinaisons.

De même, la sphère coupant quatre sphères sous quatre angles donnés se déterminera :

1° Comme orthogonale à quatre sphères Ω;

2° Comme ayant son centre à l'intersection de trois surfaces du second ordre de révolution dont les axes se rencontrent deux à deux, et qui se coupent par suite suivant des courbes planes dans des plans perpendiculaires à celui qui contient les deux axes de révolution.

Enveloppe des sphères coupant trois sphères fixes sous trois angles donnés respectivement constants. —

D'après ce qui précède, cette enveloppe est la cyclide ayant pour section principale les deux cercles coupant les trois équateurs du plan des trois centres sous les angles donnés.

Elles sont, en effet, orthogonales au cercle d'intersection des trois sphères Ω''', Ω', Ω'' déterminées comme il a été dit plus haut, et leur centre décrit la conique d'intersection de ce plan (perpendiculaire au plan des trois centres) avec les surfaces du second ordre également déterminées, toutes courbes planes qui se croisent aux deux mêmes points, réels ou imaginaires, points coniques de la nappe considérée.

Les angles α_1, α_2, α_3 et leurs trois supplémentaires déterminent les deux cercles sections principales d'une même nappe qui se coupent en deux points sur le cercle orthogonal aux trois équateurs, second couple de points coniques de la cyclide (un couple au moins est imaginaire). Leur corde détache sur les lignes des centres et à partir de ceux-ci des segments directement proportionnels aux couples de longueurs λ_1, λ_2, λ_3 se rapportant aux cercles de mêmes indices, ainsi que nous l'avons démontré dans une Note antérieure.

Si l'on remplace successivement un seul des angles α par son supplémentaire, on obtient les trois autres couples de cercles sections principales des trois autres nappes de la cyclide.

Scolie. — L'enveloppe du cercle coupant deux cercles fixes sous deux inclinaisons constantes se compose de deux cercles passant par les points d'intersection des deux cercles donnés (section principale d'une cyclide dont l'une des directrices réduite à un plan est orthogonale à la sphère enveloppée).

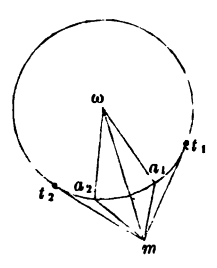
Observation. — Le théorème est évident par la trans-

formation par rayons vecteurs réciproques du lieu par l'un des points d'intersection des trois sphères fixes. La transformée de la sphère variable ayant évidemment pour centre de similitude commun de toutes ses positions le sommet du trièdre dont les faces sont les réciproques des trois sphères fixes, l'enveloppe de la sphère variable est la cyclide réciproque du cône de révolution enveloppe de ses transformées.

Même observation pour le scolie.

Remarque. — Le scolie donne une autre manière de construire le cercle Γ par la construction immédiate de six cercles auxquels il doit être tangent.

Par un point quelconque ω tracer un cercle et ses rayons $\omega a_1, \omega a_2$ respectivement inclinés de α_1 et α_2 sur



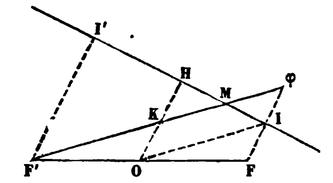
les tangentes aux cercles c_1 et c_2 en leur point M d'intersection. Par le point de concours m des parallèles respectives $a_1 m, a_2 m$ à ces tangentes, mener les tangentes mt_1, mt_2 au cercle ω. Leurs directions seront celles des tangentes en M aux deux cercles tangents à la série des cercles Γ, tandis que $m\omega$ sera celle de leur cercle orthogonal Ω et de la conique lieu de leurs centres. La même construction pour chaque couple de cercles c_1, c_2, c_3 détermine trois cercles orthogonaux et six cercles tangents au cercle cherché Γ.

Construction analogue pour les sphères.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. GOFFART.

Soient F, F′ les foyers d'une ellipse; II′ une tangente. Pour déterminer le point de contact, il suffit de prendre le symétrique φ du foyer F par rapport à cette tangente,



puis de mener la droite F′φ qui coupe II′ au point cherché.

Les points O et I étant les milieux de FF′ et de Fφ, on a OI parallèle à KM. Donc

$$\text{MH}.\text{HO} = \text{HI}.\text{HK}.$$

Or, en désignant par α l'angle HOF, on a

$$\text{IH} = \text{OF}\sin\alpha,\quad \text{HK} = \frac{\text{F}'\text{I}' - \varphi\text{I}}{2} = \frac{\text{F}'\text{I}' - \text{FI}}{2} = \text{FF}'\cos\alpha,$$

ou

$$\text{IH} = c\sin\alpha,\quad \text{HK} = 2c\cos\alpha,$$

en sorte que

$$\text{(1)}\qquad \text{MH}.\text{HO} = c^2\sin 2\alpha.$$

Si donc on considère toutes les ellipses de foyers F et F′, tangentes à toutes les droites parallèles à II′, le lieu des points de contact M sera défini par la relation (1). Et si l'on prend pour axes OM et une perpendiculaire à OM,

on reconnaît immédiatement que cette relation caractérise l'hyperbole équilatère. Donc :

Le lieu des points de contact de toutes les ellipses qui ont les mêmes foyers avec toutes les droites parallèles à une direction donnée est une hyperbole équilatère concentrique aux ellipses, qui a pour asymptotes la direction donnée et la direction perpendiculaire, et qui passe par les foyers donnés.

SUR LA CONSTRUCTION D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE AUTOUR D'UN DE SES POINTS;

PAR M. CH. BIEHLER.

Dans un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIX et XX, 2e série), j'ai donné la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points, en cherchant les expressions approchées des racines infiniment petites, qui fournissent les coordonnées des points d'intersection de la courbe et d'une transversale passant par le point considéré. Cette méthode, d'une application très facile, offre, dans son exposition, quelques difficultés lorsqu'on veut la présenter en toute rigueur. Je me propose d'exposer, dans ce qui suit, une méthode plus simple et d'une application aussi aisée que la première, qui repose, non plus sur la recherche de l'expression des racines elles-mêmes, mais sur celle de certaines fonctions symétriques des racines.

Je supposerai que le point à étudier soit à l'origine des coordonnées lorsqu'il se trouve à distance finie.

I.

1. Soit

$$(1)\quad F(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y) + \ldots + U_m(x,y) = 0$$

l'équation de la courbe, $U_\mu(x,y)$ désignant d'une manière générale l'ensemble homogène des termes de degré μ de l'équation proposée.

Coupons la courbe par la droite

$$x = ar,$$
$$y = br$$

issue de l'origine; a et b sont les coordonnées du point directeur de la droite, et r la distance, avec son signe, du point (x,y) à l'origine.

L'équation qui donne les rayons vecteurs des points d'intersection de la transversale avec la courbe sera

$$(2)\quad rU_1(a,b) + r^2U_2(a,b) + \ldots + r^mU_m(a,b) = 0.$$

Cette équation est satisfaite d'une manière permanente par $r = 0$; en la débarrassant du facteur r, il vient

$$(3)\quad U_1(a,b) + rU_2(a,b) + \ldots + r^{m-1}U_m(a,b) = 0.$$

Lorsque le point directeur (a, b) viendra se placer sur la droite $U_1(x,y) = 0$, une nouvelle racine de l'équation en r tendra vers zéro; et si $U_2(a, b)$ ne s'annule pas en même temps que $U_1(a, b)$, c'est-à-dire si $U_2(x,y)$ n'est pas divisible par $U_1(x, y)$, *une seule racine* tendra vers zéro, quelles que soient, d'ailleurs, les valeurs des coefficients $U_m(a, b)$, $U_{m-1}(a, b)$, ... des termes de degré le plus élevé. Cette racine qui tend vers zéro engendre une branche de courbe tangente à la droite $U_1(x,y) = 0$, et c'est du signe de cette racine que dépend la position de la courbe par rapport à sa tangente.

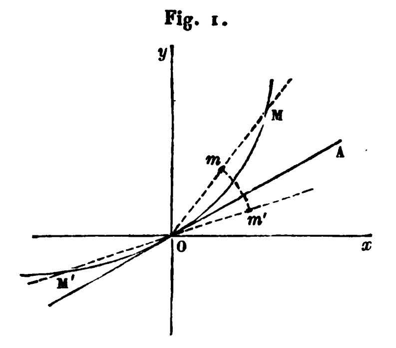
Désignons par r_1, r_2, r_3, ..., r_{m-1} les racines de

l'équation (3), et soit r_1 la racine qui tend vers zéro. On aura

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_{m-1}}=-\frac{U_2(a,b)}{U_1(a,b)}.$$

Le signe de r_1 est évidemment donné par le signe du second membre lorsque le point (a, b) est suffisamment voisin de la droite $U_1(x, y) = 0$; car tous les termes $\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \ldots, \frac{1}{r_{m-1}}$ du premier membre restent finis, et le seul terme $\frac{1}{r_1}$ augmente indéfiniment. Lorsque le point directeur passe d'un côté à l'autre de la droite $U_1(x,y)=0$, $U_1(a, b)$ change de signe, mais $U_2(a, b)$ ne changera pas de signe si le point (a, b) se meut dans une région angulaire suffisamment petite et voisine de $U_1(x, y) = 0$; la racine r_1 change donc de signe quand $U_1(a, b)$ passe

Fig. 1.



par zéro. Supposons que OA soit la tangente donnée par l'équation $U_1(x,y) = 0$, m le point directeur de la sécante; si les coordonnées du point m rendent $-\frac{U_2(a,b)}{U_1(a,b)}$ positif, le point M de la courbe correspondant à la racine r_1 se trouvera du même côté que m par rapport à l'origine, car la racine r_1 sera positive; si le point directeur vient en m', la racine r_1 sera négative, et les points M'

et m' seront de part et d'autre de l'origine : la courbe aura la disposition MOM' de la *fig.* 1.

Si, au contraire, les coordonnées du point m rendaient $-\frac{U_2(a,b)}{U_1(a,b)}$ négatif, la courbe serait située de l'autre côté de la tangente, et, comme précédemment, tout entière du même côté de la droite.

2. Supposons maintenant que $U_2(x,y)$ soit divisible par $U_1(x,y)$, et soit

$$U_2(x,y) = U_1(x,y) \times V_1(x,y).$$

L'équation (3) devient, dans ce cas,

$$(4) \qquad U_1 + rU_1V_1 + r^2U_3 + \ldots + r^{m-1}U_m = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$U_\mu = U_\mu(a,b).$$

Quand U_1 tendra vers zéro, deux des racines de l'équation (4) tendront vers zéro; soient r_1 et r_2 ces racines, nous aurons

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + S_1 = -V_1,$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)S_1 + S_2 = \frac{U_3}{U_1},$$

en désignant, pour abréger, par S_1 la somme

$$S_1 = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \cdots + \frac{1}{r_{m-1}},$$

et par S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités

$$S_2 = \frac{1}{r_3 r_4} + \cdots + \frac{1}{r_{m-2} r_{m-1}},$$

les sommes S_1 et S_2 restent finies quand U_1 passe par zéro.

Les formules précédentes peuvent s'écrire

$$(a)\qquad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=-(V_1+S_1),$$

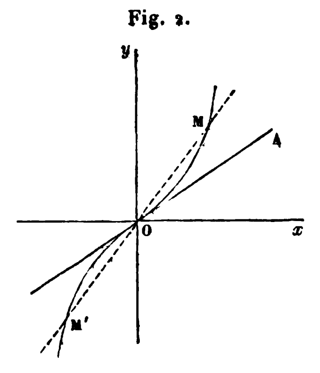
$$(b)\qquad \frac{1}{r_1 r_2}=\frac{U_3}{U_1}+(V_1+S_1)S_1-S_2,$$

et de ces deux formules on déduit la suivante :

$$(c)\quad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2=(V_1+S_1)^2-4\left[\frac{U_3}{U_1}+(V_1+S_1)S_1-S_2\right].$$

Tous les termes qui figurent dans le second membre de cette dernière équation restent finis, excepté le terme $-4\frac{U_3}{U_1}$, qui augmente indéfiniment quand U_1 passe par zéro, si, comme nous le supposons, U_3 n'est pas divisible par U_1. Le signe du second membre est donc donné par le terme $-4\frac{U_3}{U_1}$. Ce terme change de signe avec U_1, et,

Fig. 2.



par suite, le premier membre change de signe. Les racines r_1 et r_2 sont donc réelles quand le point directeur est du côté de la droite $U_1(x,y)=0$ pour lequel $-4\frac{U_3}{U_1}$ est positif, et elles sont imaginaires de l'autre. De plus, la formule (a) nous montre que ces racines

sont de signes contraires; car $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ augmentent indéfiniment, et leur somme reste finie; la formule (c) indique par le signe de $-\frac{U_3}{U_1}$ de quel côté de la tangente doit se trouver le point directeur pour que les racines soient réelles; elle permet donc, dans tous les cas, de construire la courbe, qui présente par rapport à la tangente la disposition de la *fig.* 2; le point est d'inflexion.

3. Supposons U_1 identiquement nul et U_2 égal à un produit de deux facteurs réels distincts,

$$U_2 = UV.$$

L'équation (3) prend la forme

$$(5) \qquad UV + rU_3 + \ldots + r^{m-2}U_m = 0.$$

Si U_3 n'est divisible ni par U, ni par V, une seule des racines de l'équation (5) tendra vers zéro lorsque le point directeur franchira la droite $U(x,y) = 0$ ou la droite $V(x,y) = 0$; par suite, le signe de la racine qui tend vers zéro sera encore donné par l'équation

$$(a') \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{m-2}} = -\frac{U_3}{UV},$$

car $\frac{1}{r_1}$ donne son signe au second membre. On voit aisément que l'origine est un point double réel; les branches de courbe qui se croisent en ce point sont situées d'un même côté de leurs tangentes respectives, comme pour le point simple; et le signe de la quantité $-\frac{U_3}{UV}$ donne la position de chacune des branches par rapport à sa tangente lorsqu'on y substitue successivement les coordonnées d'un point directeur voisin de chacune des deux tangentes.

Si les deux facteurs dans lesquels se décompose U_2 sont imaginaires, l'origine est un point isolé, car l'équation (5) n'a pas de racines réelles voisines de zéro.

4. Si les deux facteurs de U_2 sont égaux, U_2 sera le carré d'une fonction linéaire U; l'équation aux rayons vecteurs prendra alors la forme

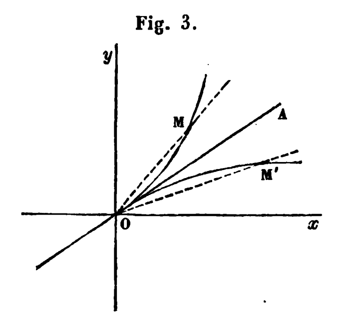
$$(6) \qquad U^2 + rU_3 + r^2U_4 + \ldots + r^{m-2}U_m = 0.$$

Si U_3 n'est pas divisible par U, une seule racine de l'équation (6) tendra vers zéro, et la formule

$$(a'') \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{m-2}} = -\frac{U_3}{U^2}$$

nous montre que cette racine ne change pas de signe quand U passe par zéro, c'est-à-dire quand le point directeur franchit la droite $U(x,y) = 0$. Le signe de U_3 fournit le signe permanent de cette racine, laquelle en-

Fig. 3.



gendre évidemment les branches MOM′ de la courbe (*fig.* 3). On pourra donc, connaissant le signe de U_3, déterminer la position de la courbe.

5. Supposons actuellement $U_3(a, b)$ divisible par U, et soit

$$U_3 = U.V_2,$$

l'équation aux rayons vecteurs prend la forme

$$(7) \qquad U^2 + rUV_2 + r^2U_4 + \ldots + r^{m-2}U_m = 0,$$

où nous supposerons U_4 non divisible par U.

Quand U tend vers zéro, deux racines de l'équation en r tendent vers zéro; soient r_1 et r_2 ces racines, on aura, comme précédemment, les formules

$$(a_1) \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -\left(\frac{V_2}{U} + S_1\right),$$

$$(b_1) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{U_4}{U^2} + \left(\frac{V_2}{U} + S_1\right)S_1 - S_2,$$

$$(c_1) \quad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{U} + S_1\right)^2 - 4\left[\frac{U_4}{U^2} + \left(\frac{V_2}{U} + S_1\right)S_1 - S_2\right].$$

La formule (c_1) est évidemment de la forme

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = \frac{V_2^2 - 4U_4 + UW}{U^2},$$

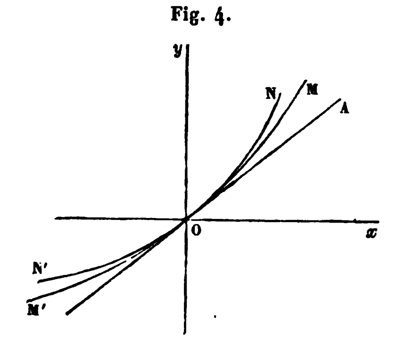
W étant la somme

$$W = -2V_2S_1 + U(4S_2 - 3S_1^2).$$

W prend donc une valeur finie quand U tend vers zéro.

1° Si $V_2^2 - 4U_4 > 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$ est posi-

Fig. 4.



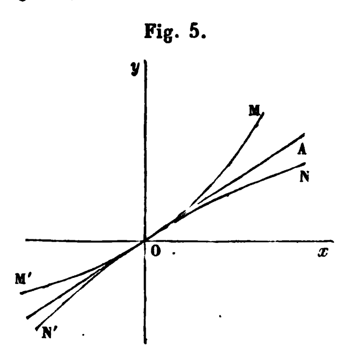
tive, et, par suite, les racines r_1 et r_2 sont réelles; la

formule (b_1) nous montre que les deux racines r_1 et r_2 sont du signe de U_4. Si U_4 est positif, les deux racines sont de même signe quand le point directeur est de part et d'autre de la droite $U = 0$; la formule (a_1) nous donne alors le signe des deux racines.

On obtient, dans ce cas, une disposition analogue à celle de la *fig.* 4, et l'on saura, dans tous les cas, si les deux branches sont toutes deux au-dessus ou toutes deux au-dessous de la tangente.

Si U_4 est négatif, les deux racines sont de signes con-

Fig. 5.



traires, on obtient alors une disposition de la courbe comme celle de la *fig.* 5.

2° Si $V_2^2 - 4U_4 < 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$ est négative, les racines r_1 et r_2 sont imaginaires conjuguées; le point O est un point de rebroussement isolé.

3° Si $V_2^2 - 4U_4 = 0$ lorsqu'on substitue dans la fonction $V_2^2 - 4U_4$ les coordonnées d'un point de la tangente $U = 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$ aura pour valeur

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = \frac{-2V_2S_1 + Q}{U} + 4S_2 - 3S_1^2,$$

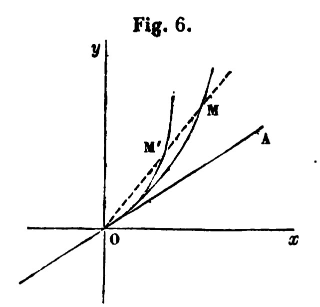
Q étant le quotient de $V_2^2 - 4U_4$ par U; elle change de

signe avec U; par suite, les racines $r_1\, r_2$ seront réelles quand le point directeur est d'un côté de la droite $U = 0$, elles sont imaginaires de l'autre.

C'est le signe du terme $-\frac{2V_2S_1+Q}{U}$ qui indique de quel côté de la tangente se trouve la courbe.

$V_2^2 - 4U_4$ étant égal à zéro quand on y substitue les coordonnées d'un point de la tangente, $U_4 = \left(\frac{V_2}{2}\right)^2$; par suite, U_4 est toujours positif, et les racines r_1 et r_2 sont de même signe, pour des points suffisamment voisins de

Fig. 6.



la tangente. La figure affectée par la courbe est alors celle de la *fig.* 6.

Pour avoir le signe de $-2V_2S_1 + Q$, il suffit de remarquer que S_1 est la somme

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \ldots + \frac{1}{r_{m-2}}.$$

Cette somme varie peu dans le voisinage de la tangente, elle ne change pas de signe si S_1 ne s'annule pas au moment où le point directeur traverse la tangente; par suite, S_1 diffère peu de la somme des inverses des racines de l'équation

$$U_4 + U_5 r + \ldots + U_m r^{m-4} = 0;$$

S_1 diffère donc aussi peu que l'on veut de $-\frac{U_5}{U_4}$.

Tous ces résultats sont indépendants du nombre des racines de l'équation en r qui, en même temps, pourraient devenir infinies; si cela arrive, un certain nombre de termes des sommes

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_{m-1}},$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \ldots + \frac{1}{r_{m-2} r_{m-1}}$$

disparaissent, et rien ne sera changé dans les raisonnements.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude détaillée des circonstances que présente la discussion de la courbe, lorsque plus de deux racines tendent vers zéro à la fois; nous nous contenterons d'indiquer en quelques mots la manière dont on pourra procéder, dans le cas plus complexe où trois racines tendent vers zéro.

6. Soient toujours $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$, les racines de l'équation en r qui sera de degré $m - 1$ dans le cas que nous allons étudier; soient r_1, r_2, r_3 les trois racines qui tendent vers zéro; supposons pour fixer les idées que l'équation en r soit

$$U_1 + r U_2 + r^2 U_3 + \ldots + r^{m-1} U_m = 0,$$

et que l'on ait

$$U_2 = V_1 U_1, \quad U_3 = V_2 U_1.$$

On aura les relations

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots = -V_1,$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} + \ldots = V_2,$$

$$\frac{1}{r_1 r_2 r_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{U_4}{U_1}.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = -(V_1 + S_1),\\
&\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} = V_2 + (V_1 + S_1)S_1 - S_2,\\
&\frac{1}{r_1 r_2 r_3} + \ldots = -\frac{U_4}{U_1} - [V_2 + (V_1 + S_1)S_1 - S_2]S_1 - S_3;
\end{aligned}$$

en appelant S_1 la somme des racines autres que r_1, r_2, r_3, S_2 la somme de leurs produits deux à deux, et S_3 la somme de leurs produits trois à trois.

Nous formerons de même la fonction des racines

$$\Delta = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right)^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2.$$

Si $\Delta > 0$ les trois racines r_1, r_2, r_3 sont réelles comme l'on sait, et si $\Delta < 0$ une seule racine, r_1 est réelle. Il est aisé de voir que Δ est de la forme

$$\frac{-U_4^2 + U_1 W_1 + U_1^2 W_2}{U_1^2};$$

cette quantité est essentiellement négative pour de petites valeurs de U_1; par suite, une seule racine r_1 de l'équation est réelle, parmi celles qui tendent vers zéro; les deux autres sont imaginaires conjuguées, le produit $r_2 r_3$ est donc positif, et, par conséquent, le signe de la troisième racine est donné par le signe de $-\frac{U_4}{U_1}$. Cette racine change donc de signe avec U_1. On obtient une seule branche de courbe analogue à celle de la *fig.* 1.

On discuterait aussi aisément les cas où :

1° U_2 est le carré d'une fonction linéaire U, U_1 étant identiquement nulle, et U_3 divisible par U, ainsi que U_4;

2° U_1 et U_2 étant identiquement nuls, U_3 est le cube d'une fonction linéaire U, et U_4 divisible par U, ainsi que U_5.

Le cas où quatre racines de l'équation en r tendraient vers zéro est un peu plus complexe; on voit toutefois que le problème n'est autre que celui de chercher les conditions de réalité de deux ou quatre racines d'une équation du quatrième degré, et qu'on peut introduire, dans la solution, de notables simplifications en ne conservant dans les expressions que les termes qui influent réellement sur leurs signes.

7. Nous allons terminer cet exposé par une remarque importante.

Si, au lieu de considérer une équation de degré m qui représente une courbe ayant à l'origine un point simple ou double, on avait considéré une équation représentant une courbe ayant à l'origine un point multiple d'ordre p, la théorie eût été la même. Car soit

$$U_p(a, b) + r U_{p+1}(a, b) + \ldots + r^{m-p} U_m(a, b) = 0,$$

l'équation en r qui convient à ce cas.

Le polynôme $U_p(x, y)$ est décomposable en p facteurs de la forme $\beta x - \alpha y$ réels ou imaginaires, simples ou multiples. Considérons un facteur simple de $U_p(x, y)$, il fournira dans $U_p(a, b)$ un facteur linéaire correspondant en a et b. Soient

$$U_p(x, y) = U(x, y) V_{p-1}(x, y)$$

et, pour abréger,

$$U_p(a, b) = UV_{p-1}.$$

L'équation en r sera

$$UV_{p-1} + r U_{p+1} + \ldots + r^{m-p} U_m = 0.$$

Si $U_{p+1}(x, y)$ n'est pas divisible par $U(x, y)$, le raisonnement que nous avons fait, dans le cas d'un point simple ordinaire à l'origine, nous montre que la droite

$U = 0$ du faisceau $U_p(x, y) = 0$ est tangente à une branche ordinaire de courbe, située tout entière d'un même côté de sa tangente. Toutes les racines simples de l'équation $U_p(x, y) = 0$ donnent lieu à la même discussion; si elles sont toutes simples, on pourra donc dire que le point multiple d'ordre p résulte de la superposition de p points simples.

Si le polynôme $U_p(x, y)$ admet un facteur double, l'équation en r prendra la forme

$$U^2 V_{p-2} + r U_{p+1} + \ldots + r^{m-p} U_m = 0,$$

et la droite $U = 0$ sera une tangente de rebroussement; on construira les branches tangentes à la droite $U = 0$, comme nous l'avons fait, dans le cas où l'origine est un point double.

Il est inutile de pousser plus loin cette analyse, ce que nous avons dit précédemment suffit pour montrer comment on opérerait dans des cas plus complexes.

8. Dans ce qui précède, nous avons coupé la courbe par la droite

$$x = ar,$$
$$y = br,$$

et nous avons étudié l'équation en r qui donne les rayons vecteurs menés de l'origine au point de rencontre de la droite et de la courbe. Cette méthode n'offre aucune difficulté pratique; mais on peut aussi, au lieu de cela, prendre l'équation de la transversale sous la forme

$$y = \lambda x,$$

et éliminer y entre cette équation et celle de la courbe; on obtient alors l'équation

$$U_1(1, \lambda) + x U_2(1, \lambda) + \ldots + x^{m-1} U_m(1, \lambda) = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est donné par

$$U_1(1, \lambda) = 0,$$

et l'on opérera sur cette équation en x et λ, comme nous l'avons fait sur l'équation en r, a et b.

Ce seront les fonctions symétriques

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{m-1}},$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{m-2} x_{m-1}},$$

qui nous permettront de faire la discussion et de construire la courbe dans chaque cas particulier.

9. Si le point à étudier n'est pas à l'origine, mais en un point $(\alpha, 6)$ du plan, il faudra considérer l'équation

$$0 = F(\alpha, 6) + xF'_\alpha + yF'_6 + \frac{1}{1.2}(x^2 F''_{\alpha^2} + 2xy F''_{\alpha\beta} + y^2 F''_{\beta^2}) + \ldots,$$

et, comme $F(\alpha, 6) = 0$ par hypothèse, l'équation précédente a la forme

$$U_1(x, y) + U_2(x, y) + \ldots + U_m(x, y) = 0,$$

qui est de même forme que celle que nous avons discutée.

Nous allons passer maintenant au cas où le point considéré est à l'infini, c'est-à-dire étudier la courbe autour de ses asymptotes.

DISTANCES DU CENTRE DE GRAVITÉ AUX POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

---

1. Nous désignerons par A, B, C les trois sommets d'un triangle et par a, b, c les longueurs des côtés respectivement opposés à ces sommets.

Représentons par R le rayon du cercle circonscrit; par r, r', r'', r''' les rayons des cercles, dont le premier est inscrit et les autres exinscrits au triangle.

Supposons que la lettre G soit mise au centre de gravité du triangle et la lettre O au centre du cercle circonscrit. Portons les lettres I, I', I'', I''' aux centres des cercles, l'un inscrit et les autres exinscrits. Enfin plaçons la lettre H au point de concours des hauteurs.

2. Les *distances du centre de gravité* G *aux trois sommets* A, B, C ont pour carrés respectifs, comme l'on sait, les expressions

$$\overline{GA}^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2),$$
$$\overline{GB}^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2),$$
$$\overline{GC}^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

qui donnent

$$\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

3. La *distance du centre de gravité* G *au centre* O *du cercle circonscrit* est donnée par

$$\overline{GO}^2 = 4R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

On en déduit de suite la *distance du centre de gravité* G *au point de concours* H *des hauteurs,* dont le carré est ainsi

$$\overline{GH}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Enfin on trouve facilement que le carré de *la droite qui joint le centre de gravité* G *au centre* I *du cercle*

inscrit a pour valeur

$$\overline{\mathrm{GI}}^2 = \frac{1}{3}(bc + ca + ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - 4\mathrm{R}r.$$

Dans cette expression, il suffira de changer le signe de a et de remplacer r par $-r'$, pour avoir la distance qui correspond au centre du cercle exinscrit, opposé à l'angle A.

On trouve ainsi que

$$\overline{\mathrm{GI}'}^2 = \frac{1}{3}(bc - ca - ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\mathrm{R}r',$$

$$\overline{\mathrm{GI}''}^2 = \frac{1}{3}(ca - ab - bc) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\mathrm{R}r'',$$

$$\overline{\mathrm{GI}'''}^2 = \frac{1}{3}(ab - bc - ca) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\mathrm{R}r'''.$$

Ces quatre dernières égalités donnent

$$\overline{\mathrm{GI}}^2 + \overline{\mathrm{GI}'}^2 + \overline{\mathrm{GI}''}^2 + \overline{\mathrm{GI}'''}^2 = 4\mathrm{R}(r' + r'' + r''' - r) - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= 16\mathrm{R}^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= 12\mathrm{R}^2 + 4\overline{\mathrm{GO}}^2.$$

5. Toutes ces formules peuvent s'obtenir directement par la Géométrie pure; on peut aussi les calculer au moyen de la Trigonométrie.

PROPOSITIONS DE M. S. RÉALIS.

I. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 4\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

II. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 - 2\beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 2\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

III. L'équation

$$x^4 + (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque, et β un entier différent de $\pm \alpha^2$ et de $3\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

IV. L'équation

$$x^4 - (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$, n'a pas de racine entière.

V. L'équation

$$x^4 - \frac{\alpha^2 + \beta}{2} x^2 + \alpha(\alpha^2 + \beta)x - \frac{\alpha^4 - \beta^2}{4} = 0,$$

où α et β sont des entiers de même parité, β étant différent de $\pm \alpha^2$, n'a pas de racine entière.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne.

Je ferai remarquer que de la construction du centre de courbure de l'ellipse, donnée dans le numéro de mai (p. 238) par M. Genty, on peut très facilement déduire la construction due à M. Mannheim. A cet effet, complétons la figure de la page 238, en tirant Oa et, si cette

droite coupe tC au point i, en joignant ce point au point n.

Dans le triangle oqs, qa et sa sont des hauteurs; donc oa est perpendiculaire à qs et par suite à tn; dès lors, dans le triangle otn, oa et tC étant des hauteurs, ni est perpendiculaire à ot, et par suite à an; d'où la construction de M. Mannheim :

Élever à an la perpendiculaire ni jusqu'à sa rencontre avec le diamètre oa et abaisser du point i la perpendiculaire iC sur l'axe os.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1281

(voir 2e série, t. XVII, p. 384);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

L'équation

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2y+1}-(1-\sqrt{2})^{2y+1}\right]$$

n'admet pas d'autre solution, en nombres entiers, que celle qui correspond aux valeurs $x=y=0$.

(DE JONQUIÈRES.)

Si l'on pose

$$t=\frac{(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}}{2},$$

$$w=\frac{(2+\sqrt{3})^{2x+1}-(2-\sqrt{3})^{2x+1}}{2\sqrt{3}},$$

$$u=\frac{(1+\sqrt{2})^{2y+1}+(1-\sqrt{2})^{2y+1}}{2},$$

$$v=\frac{(1+\sqrt{2})^{2y+1}-(1-\sqrt{2})^{2y+1}}{2\sqrt{2}},$$

on a identiquement

$$(1) \qquad t^2 - 3w^2 = 1,$$

$$(2) \qquad u^2 - 2v^2 = -1,$$

et l'équation proposée devient

$$(3) \qquad t = 2v.$$

De ce système de trois équations on déduit facilement le suivant :

$$(4) \qquad u^2 + 1 = 2v^2,$$

$$(5) \qquad 2u^2 + 1 = 3w^2.$$

Or, M. Gerono a démontré (2e série, t. XVII, p. 382) que ces deux dernières équations simultanées ne peuvent être vérifiées que par $u = v = w = 1$; d'où $t = 2$.

Donc il en résulte

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} + (2-\sqrt{3})^{2x+1} = 4,$$
$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} - (2-\sqrt{3})^{2x+1} = 2\sqrt{3},$$

d'où

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} = 2+\sqrt{3},$$

équation qui évidemment ne peut être satisfaite, en nombres entiers, que par $x = 0$.

De même

$$(1+\sqrt{2})^{2y+1} + (1-\sqrt{2})^{2y+1} = 2,$$
$$(1+\sqrt{2})^{2y+1} - (1-\sqrt{2})^{2y+1} = 2\sqrt{2},$$

d'où

$$(1+\sqrt{2})^{2y+1} = 1+\sqrt{2},$$

et enfin $y = 0$.

Question 1420

(voir 3e série, t. I, p. 132);

PAR M. REBUFFEL,
Professeur au lycée d'Angers.

Trouver la valeur des intégrales

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{x[nx-(n+1)]\sqrt{R}},$$

dans lesquelles R *désigne le polynôme*

$$nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\ldots+2x+1.$$

(S. RÉALIS.)

I. On sait que

$$R=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},$$

par conséquent

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{R}}=\int \frac{x^{n-1}(x-1)\,dx}{\sqrt{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}}.$$

Posons

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1=y,$$

d'où

$$n(n+1)(x^n-x^{n-1})\,dx=dy,$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{n(n+1)}\int \frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{y}}{n(n+1)}=\frac{2(x-1)}{n(n+1)}\sqrt{R}.$$

II. On peut écrire la deuxième intégrale

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^n[nx-(n+1)]\sqrt{R}}$$
$$=\int \frac{(x-1)x^{n-1}\,dx}{x^n[nx-(n+1)]\sqrt{x^n[nx-(n+1)]+1}},$$

et, en posant

$$x^n[nx-(n+1)]=y,$$

d'où

$$n(n+1)[x^n-x^{n-1}]\,dx=dy,$$

elle devient

$$\frac{1}{n(n+1)}\int\frac{dy}{y\sqrt{1+y}}=\frac{2}{n(n+1)}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{y}}$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\,\mathrm{L}\,\frac{(x-1)\sqrt{\mathrm{R}}-1}{\sqrt{(x-1)^2.\mathrm{R}-1}}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Piuma (Charles-Marie), à Gênes; Chabanel (Charles) et H.-B.-D., professeur de Mathématiques à Rome.

Question 1423

(voir 3e série, t. I, p. 479);

PAR M. N. GOFFART.

On donne une conique fixe et deux points A *et* A′ *situés sur une même tangente à cette courbe.*

Par le point A′ *on mène une seconde tangente qui touche la conique en d. On mène la droite* A*d qui rencontre de nouveau la conique au point e, la droite* A′*e qui coupe la conique au point f et enfin la droite* A*f rencontrant de nouveau la conique au point g.*

Démontrer que la tangente à la conique au point g et la droite A′*ef se coupent en un point de la seconde tangente menée du point* A *à la courbe.* (Genty.)

Soient h (¹) le point de contact de AA′ et i le point d'intersection de A′e et gd : la droite hi est la polaire de A (²); elle rencontre la conique en m et la tangente A′d

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

(²) Parce que la polaire de A passe par le point d'intersection, i, des diagonales ef, dg du quadrilatère inscrit $dfge$ dont les côtés op-

en B. Or, d étant le pôle de $A'dB$, il en résulte que Ad est la polaire de B, et que par suite Be est tangente en e à la conique.

Appliquons le théorème de Pascal au triangle den.

Les tangentes Be, AA', $A'B$ rencontrent respectivement les côtés hd, de, eh aux points P, A, C qui sont en ligne droite.

Or e est le pôle de BeP, A' celui de hd : donc $A'fe$ est la polaire du point P. Cette polaire rencontre gd en i ainsi que hm : donc gm passe au point P.

Donc les trois pôles P, g, m étant en ligne droite, leurs polaires $A'ef$, gR tangente en g, et Am tangente en m se coupent au même point. C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions analytiques de MM. Moret-Blanc, Ch. Robinet et U. Génin, élèves au Lycée de Bar-le-Duc; Romant, élève au Lycée de Lyon; Berthelet, élève au Lycée de Moulins.

Question 1424

(voir 3e série, t. I, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un ellipsoïde et un point A, *on mène par ce point une sécante variable* D; *soit* D_1 *la droite conjuguée de* D *par rapport à l'ellipsoïde. Trouver le lieu de la projection* M *du point* A *sur la droite* D_1.

(BARBARIN.)

---

posés de, fg se coupent en A. La droite Hi prolongée rencontre la conique au point m de contact de la seconde tangente mA menée de A.

De même, la polaire du point P de rencontre des droites mg, dh passe par le point i intersection des diagonales gd, hm du quadrilatère inscrit $mghd$; donc $A'ef$ est la polaire du point P; et par conséquent les tangentes à la courbe aux points m, g se coupent en un point de $A'ef$. C'est ce qu'il fallait démontrer. (G.)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

équation de l'ellipsoïde.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A; x_1, y_1, z_1 celles d'un autre point B de la droite D.

La droite D_1 sera l'intersection des plans polaires des points A et B; elle aura pour équations

$$(1)\qquad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0.$$

Les cosinus directeurs de cette droite sont proportionnels à

$$\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2},\quad \frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2},\quad \frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2};$$

l'équation du plan mené par le point A perpendiculairement à D_1 est donc

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2}(x-x_0)\\ &+\frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2}(y-y_0)+\frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2}(z-z_0)=0.\end{aligned}\right.$$

On obtiendrait l'équation du lieu du point M en éliminant x_1, y_1, z_1 entre ces trois équations; mais l'équation (1), ne renfermant pas ces variables, est celle du lieu demandé qui est le plan polaire du point A.

Ce résultat pouvait être prévu, car la droite D tournant autour du point A, sa conjuguée D_1 se meut dans le plan polaire de ce point et peut y prendre toutes les positions; un point quelconque M du plan est donc la projection du point A sur une des droites D_1.

Note. — La même question a été résolue par M. Goffart.

Question 1427

(voir 3e série, t. I, p. 527);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(x-1)^m x^n\,dx}{\sqrt{P_n x^n + P_{n-1}x^{n-1} + \ldots + P_2 x^2 + P_1 x + 1}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+2m+1)}{1.2.3\ldots(2m+1)}.$$

(S. RÉALIS.)

Désignons par R le polynôme compris sous le signe du radical. Le produit de R par $1.2.3\ldots(2m+1)$ est identique à la dérivée de l'ordre $2m+1$ de

$$x^{n+2m+1} + x^{n+2m} + x^{n+2m-1} + \ldots + x + 1 = \frac{x^{n+2m+2}-1}{x-1};$$

en posant

$$\varphi = \frac{x^{n+2m+2}-1}{x-1},$$

l'intégrale proposée devient donc

$$S = \sqrt{1.2.3\ldots(2m+1)} \int \frac{(x-1)^m x^n\,dx}{\sqrt{\dfrac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}.$$

Soit

$$y^2 = (x-1)^{2m+2}\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}},$$

nous aurons, en différentiant cette équation,

$$2y\,dy = (x-1)^{2m+1}\left[(x-1)\frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2)\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}\right]dx,$$

puis, en divisant le premier membre par y et le second par $(x-1)^{m+1}\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}$,

$$2\,dy = \frac{(x-1)^m}{\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}\left[(x-1)\frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2)\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}\right]dx.$$

De

$$(x-1)\varphi = x^{n+2m+2} - 1$$

on déduit successivement

$$(x-1)\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = (n+2m+2)x^{n+2m+1},$$

$$(x-1)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d\varphi}{dx} = (n+2m+1)(n+2m+2)x^{n+2m},$$

$$(x-1)\frac{d^3\varphi}{dx^3} + 3\frac{d^2\varphi}{dx^2} = (n+2m)(n+2m+1)(n+2m+2)x^{n+2m-1},$$

....,

$$(x-1)\frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2)\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}} = (n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)x^n.$$

Donc

$$2\,dy = (n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)\frac{(x-1)^m x^n\,dx}{\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}$$

et

$$S = \frac{2y\sqrt{1.2.3\ldots(2m+1)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)}.$$

Remplaçant y par sa valeur

$$(x-1)^{m+1}\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}} = (x-1)^{m+1}\sqrt{1.2.3\ldots(2m+1)\mathrm{R}},$$

on a

$$S = 2 \times \frac{1.2.3\ldots(2m+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)}(x-1)^{m+1}\sqrt{\mathrm{R}}.$$

Remarque. — Si l'on fait $m = 0$ et si l'on remplace n par $n-1$, on a

$$R = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1$$

et

$$S = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}} = \frac{2(x-1)\sqrt{R}}{n(n+1)}.$$

Note.— Solution analogue de M. Charles-Marie Piuma, à Gênes.

Question 1428

(voir 3e série, t. I, p. 528);

PAR M. ERNEST CÉSARO.

Si l'on considère les solutions entières (non négatives) de chacune des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \ \ldots,$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de $n+2$ *sur le nombre des diviseurs de* $(n+2)$.

(CATALAN.)

La $p^{\text{ième}}$ des équations proposées est

$$px + (p+1)y = n - (2p - 1).$$

Il est visible qu'on y satisfait en prenant $x = -(n+3)$, $y = n+1$. En conséquence, les solutions *entières* de cette équation sont données par les formules

$$x = -(n+3) + (p+1)t,$$
$$y = n + 1 - pt,$$

où t est un entier quelconque.

Pour que x et y ne soient pas négatifs, il faut attribuer

à t des valeurs telles qu'on ait

$$\frac{n+3}{p+1} \leqq t \leqq \frac{n+1}{p}$$

ou bien

$$\left[\frac{n+2}{p+1}\right] < t \leqq \left[\frac{n+1}{p}\right],$$

[Z] désignant le plus grand nombre entier contenu dans Z.

Le nombre des solutions *entières, non négatives,* de l'équation considérée, est donc

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+2}{p+1}\right].$$

Cela posé, il est clair que $\left[\frac{n+2}{p+1}\right] - \left[\frac{n+1}{p+1}\right]$ égale 1, ou 0, suivant que $p+1$ divise ou ne divise pas $n+2$.

Conséquemment on a

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+1}{p+1}\right] - 1$$

si $p+1$ divise $n+2$, et

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+1}{p+1}\right]$$

lorsque $p+1$ ne divise pas $n+2$.

Si $\theta(Z)$ désigne le nombre des diviseurs de Z, on obtient par addition

$$\begin{aligned} &N_1 + N_2 + N_3 + \ldots \\ &= \left[\frac{n+1}{1}\right] - [\theta(n+2) - 1] = n + 2 - \theta(n+2) \text{ (1)}. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Chabanel et Goffart.

---

(1) Si $px + (p+1)y = n - (2p-1)$ représente la dernière des équations

$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \ldots,$

QUESTIONS.

1460. Soient G le centre de gravité d'un tétraèdre ABCD; O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres GBCD, GACD, GABD, GABC respectivement. Le centre de gravité du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre donné.

Même théorème pour le triangle et les cercles circonscrits. (GENTY).

1461. Par un des points d'intersection A de deux

---

dont on considère les solutions *entières, non négatives*, p est nécessairement le plus grand nombre entier satisfaisant à la condition

$$n - (2p - 1) \geqq 0;$$

c'est dire que $p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ d'où $p+1 = \left[\frac{n+3}{2}\right]$ et $\left[\frac{n+1}{p+1}\right] = 1$.

Or la somme des différences

$$\left[\frac{n+1}{1}\right] - \left[\frac{n+1}{2}\right],\quad \left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n+1}{3}\right],\quad \ldots,\quad \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+1}{p+1}\right]$$

se réduit à

$$\left[\frac{n+1}{1}\right] - \left[\frac{n+1}{p+1}\right] = n+1-1 = n.$$

Donc, le nombre des solutions dont il s'agit s'obtient en retranchant de n autant d'unités qu'il y a de diviseurs de $n+2$ dans la suite 2, 3, ..., $(p+1)$.

Mais $p+1$ étant au moins égal à $\frac{n+2}{2}$ et moindre que $n+2$, le nombre $n+2$ a seulement deux diviseurs $n+2$ et 1, qui n'appartiennent pas à la suite 2, 3, ..., $(p+1)$.

Par conséquent, on a

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_p = n - [\theta(n+2) - 2] = n + 2 - \theta(n+2).$$

C. Q. F. D.

(G.)

hyperboles équilatères de même centre O, on mène une sécante qui rencontre les deux courbes en B, B'; de ces points on abaisse des perpendiculaires BC, B'C' sur les tangentes aux deux courbes, au même point A : démontrer que l'angle COC' est quadruple de l'angle des asymptotes.

(E. Fauquembergue.)

1462. Dans le triangle ABC on a pris le point C' sur AB, et B' sur AC, tels que l'angle C'CB soit égal à $\frac{C}{m}$ et que l'angle B'BC soit égal à $\frac{B}{m}$; démontrer que si CC' = BB' le triangle ABC est isoscèle. (Emile Lemoine.)

1463. Étant donné un point P sur une ellipse de centre O, on mène en ce point une tangente et la normale qui touche au point Q la développée de l'ellipse, et l'on fait passer un cercle par les extrémités r, r' du diamètre conjugué à OP et par la projection S du centre O sur la tangente en P, puis l'on prolonge OS jusqu'à sa rencontre en S' avec le cercle; démontrer que OS' = PQ.

(Chambon.)

1464. On donne les deux paraboles $y^2 = 2c(x \pm c)$; une tangente à l'une de ces paraboles rencontre la seconde parabole aux points P, Q; sur PQ comme diamètre on décrit un cercle qui rencontre la seconde parabole en deux nouveaux points R, S; prouver que la droite RS est tangente à la première parabole. (Wolstenholme.)

1465. De deux points situés sur l'axe des x et équidistants de l'origine, on mène des tangentes à la conique représentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x = 0;$$

prouver que les points d'intersection de ces tangentes sont sur la conique $by^2 + hxy - x = 0$.

(WOLSTENHOLME.)

1466. ABCD étant un trapèze, on joint les extrémités A et D du côté oblique AD à un point M du côté BC; on mène une parallèle à DM par le point B, et une parallèle AM par le point C. Démontrer que ces deux droites se coupent sur AD. (D'OCAGNE.)

1467. Le nombre premier $p = 2n + 1$ étant supérieur à 3, la somme des puissances, d'un même degré pair $2a$ compris entre zéro et $p - 1 = 2n$, des n entiers $1, 2, 3, \ldots, n$ et celle des puissances, du même degré, des n entiers suivants $n + 1, n + 2, \ldots, p - 1 = 2n$ sont divisibles par p. (LIONNET.)

1468. Soient sur le cadran d'une montre, à l'instant θ, OA la direction de la petite aiguille, OB celle de la grande; déterminer θ de façon que, lorsque, après un certain temps, la petite aiguille sera venue sur la direction OB, la grande aiguille soit précisément dirigée suivant OA. Quelles sont toutes les heures comprises dans un cycle complet, de midi à minuit, qui répondent à la question?

Remarque. — On pourrait appeler ce nouveau problème sur les aiguilles d'une montre le *problème des positions inverses*. Il fait connaître les instants pour lesquels les indications de la montre ne seraient pas précises, si les deux aiguilles étaient absolument identiques.

(D'OCAGNE.)

RECTIFICATION.

Même tome, page 310, ligne 12 en remontant : *au lieu de* yx, *lisez* y^x.

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES DU FOYER D'UNE CONIQUE A QUATRE POINTS OU A QUATRE TANGENTES

[FIN (¹)];

PAR M. X. ANTOMARI,

Professeur au lycée de Carcassonne.



DEUXIÈME PARTIE.

RELATION ENTRE LES DISTANCES D'UN FOYER A QUATRE TANGENTES.

1. L'équation tangentielle d'une courbe du second ordre rapportée à son foyer est

$$(1)\qquad (u-u_0)^2+(v-v_0)^2-\frac{1}{p^2}=0,$$

u_0 et v_0 désignant les coordonnées de la directrice.

Cette équation développée devient

$$u^2+v^2-2uu_0-2vv_0+u_0^2+v_0^2-\frac{1}{p^2}=0.$$

Si donc (u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) désignent quatre tangentes, on aura les quatre équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&u^2+v^2-2uu_0-2vv_0+u_0^2+v_0^2-\frac{1}{p^2}=0,\\
&u_1^2+v_1^2-2u_1u_0-2v_1v_0+u_0^2+v_0^2-\frac{1}{p^2}=0,\\
&u_2^2+v_2^2-2u_2u_0-2v_2v_0+u_0^2+v_0^2-\frac{1}{p^2}=0,\\
&u_3^2+v_3^2-2u_3u_0-2v_3v_0+u_0^2+v_0^2-\frac{1}{p^2}=0.
\end{aligned}\right.$$

(¹) *Voir* même Tome, p. 337.

Soient d, d_1, d_2, d_3 les distances du foyer aux quatre tangentes. On aura

$$(3)\quad \begin{cases} d^2 = \dfrac{1}{u^2+v^2}, & d_1^2 = \dfrac{1}{u_1^2+v_1^2}, \\ d_2^2 = \dfrac{1}{u_2^2+v_2^2}, & d_3^2 = \dfrac{1}{u_3^2+v_3^2}. \end{cases}$$

Éliminons u_0, v_0 et $\frac{1}{p^2}$ entre les équations (2). Il viendra, en tenant compte des relations (3),

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{d^2} & u & v & 1 \\ \dfrac{1}{d_1^2} & u_1 & v_1 & 1 \\ \dfrac{1}{d_2^2} & u_2 & v_2 & 1 \\ \dfrac{1}{d_3^2} & u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation recherchée.

2. On voit sans plus de détails que, si trois tangentes restent fixes et que la quatrième varie de façon que la relation (4) soit satisfaite, la quatrième tangente enveloppe une conique ayant pour foyer l'origine; et, par suite, que réciproquement, si quatre droites sont assujetties à la relation (4), elles sont tangentes à une même conique ayant pour foyer l'origine ou un point donné.

3. Comme nous allons le voir, la relation (4) peut être mise sous une forme plus simple et plus facile à interpréter géométriquement. Mais nous pouvons dès à présent démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *Dans les coniques à centre, le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.*

Supposons que les quatre tangentes forment un parallélogramme. On aura

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_2}{u} = \dfrac{v_2}{v} = \mathrm{K}, \\ \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{v_3}{v_1} = \mathrm{K}'. \end{cases}$$

Par suite,

$$(6)\qquad \begin{cases} d_2^2 = \dfrac{1}{u_2^2 + v_2^2} = \dfrac{1}{\mathrm{K}^2} \times \dfrac{1}{u^2 + v^2} = \dfrac{d^2}{\mathrm{K}^2}, \\ d_3^2 = \dfrac{1}{u_3^2 + v_3^2} = \dfrac{1}{\mathrm{K}'^2} \times \dfrac{1}{u_1^2 + v_1^2} = \dfrac{d_1^2}{\mathrm{K}'^2}. \end{cases}$$

Remplaçant dans (4), il vient

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{d^2} & u & v & 1 \\ \dfrac{1}{d_1^2} & u_1 & v_1 & 1 \\ \dfrac{\mathrm{K}^2}{d^2} & \mathrm{K}u & \mathrm{K}v & 1 \\ \dfrac{\mathrm{K}'^2}{d_1^2} & \mathrm{K}'u_1 & \mathrm{K}'v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Après avoir multiplié la première ligne par K et la deuxième par K′, retranchons la troisième de la première et la quatrième de la deuxième; puis supprimons les facteurs $(1 - \mathrm{K})$ et $(1 - \mathrm{K}')$; nous aurons

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{K}}{d^2} & 0 & 0 & -1 \\ \dfrac{\mathrm{K}'}{d_1^2} & 0 & 0 & -1 \\ \dfrac{\mathrm{K}^2}{d^2} & \mathrm{K}u & \mathrm{K}v & 1 \\ \dfrac{\mathrm{K}'^2}{d_1^2} & \mathrm{K}'u_1 & \mathrm{K}'v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{KK'^2}{d_1^2}(uv_1 - vu_1) - \frac{K^2K'}{d^2}(uv_1 - vu_1) = 0,$$

ou encore

$$(8) \qquad \frac{d^2}{d_1^2} = \frac{K}{K'}.$$

Mais, en vertu des relations (6), on a

$$(9) \qquad \frac{d_2^2}{d_3^2} = \frac{K'^2}{K^2}\frac{d^2}{d_1^2} = \frac{K'}{K},$$

et, en multipliant (8) et (9), membre à membre, on a

$$d^2 d_2^2 = d_1^2 d_3^2,$$

d'où

$$dd_2 = d_1 d_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *Le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes est une circonférence.*

C'est à l'aide de cette propriété que nous déterminerons les foyers dans l'ellipse et dans l'hyperbole; mais, avant d'aborder cette question, nous allons simplifier la relation (4).

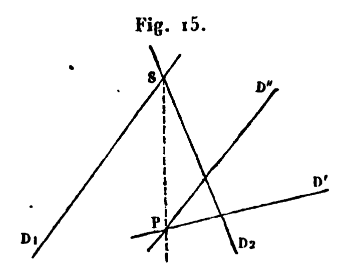
4. Commençons par rappeler une formule importante. Étant données deux droites $D_1(u_1, v_1)$ et $D_2(u_2, v_2)$ et un point P, intersection de deux droites $D'(u', v')$ et $D''(u'', v'')$ (*fig.* 15), on a

$$(10) \qquad \frac{\sin D_1SP}{\sin PSD_2} \times \frac{\sin OSD_2}{\sin OSD_1} = \pm \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}},$$

O désignant l'origine des coordonnées.

Pour plus de détails à ce sujet, nous renvoyons à la *Géométrie analytique* de Painvin.

Fig. 15.



Posons maintenant

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

On voit sans peine que la relation (4) développée peut s'écrire

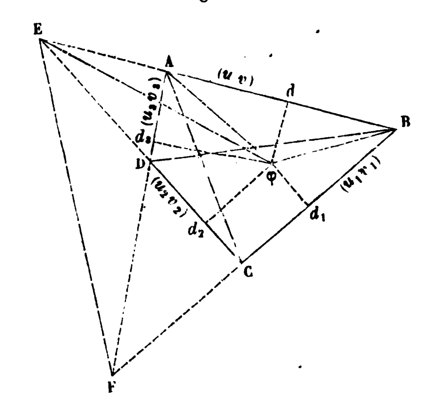
$$\frac{\Delta}{d^2} - \frac{\Delta_1}{d_1^2} + \frac{\Delta_2}{d_2^2} - \frac{\Delta_3}{d_3^2} = 0,$$

et, en divisant par Δ qui n'est pas nul, car les trois tangentes (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) ne peuvent concourir au même point, il vient

$$(12)\quad \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2}\,\frac{\begin{vmatrix} v & u & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}} + \frac{1}{d_2^2}\,\frac{\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}} - \frac{1}{d_3^2}\,\frac{\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le foyer soit à l'intérieur du quadrilatère formé par les quatre tangentes,

Fig. 16.



et soit φ ce foyer (*fig.* 16), qui est aussi l'origine.

On a, d'après ce qui précède,

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{DBC}} \times \frac{\sin \widehat{\varphi BC}}{\sin \widehat{\varphi BA}}, \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} &= \frac{\sin \widehat{BEF}}{\sin \widehat{CEF}} \times \frac{\sin \widehat{\varphi EC}}{\sin \widehat{\varphi EB}}, \\ \frac{\Delta_3}{\Delta} &= \frac{\sin \widehat{CAB}}{\sin \widehat{CAD}} \times \frac{\sin \widehat{\varphi AD}}{\sin \widehat{\varphi AB}}. \end{aligned} \right.$$

On a, d'autre part, en examinant la figure,

$$(14)\quad \frac{\sin \widehat{\varphi BC}}{\sin \widehat{\varphi BA}} = \frac{d_1}{d}, \quad \frac{\sin \widehat{\varphi EC}}{\sin \widehat{\varphi EB}} = \frac{d_2}{d}, \quad \frac{\sin \widehat{\varphi AD}}{\sin \widehat{\varphi AB}} = \frac{d_3}{d}.$$

En tenant compte des relations (13) et (14), l'équa-

tion (12) devient

$$(15)\quad \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1}\frac{\sin\widehat{ABD}}{\sin\widehat{DBC}} + \frac{1}{d_2}\frac{\sin\widehat{BEF}}{\sin\widehat{CEF}} - \frac{1}{d_3}\frac{\sin\widehat{CAB}}{\sin\widehat{CAD}} = 0.$$

Soient A, B, C, D les angles du quadrilatère. Les triangles ABD et DBC donnent

$$\frac{AD}{\sin\widehat{ABD}} = \frac{BD}{\sin A}, \quad \frac{DC}{\sin\widehat{DBC}} = \frac{DB}{\sin C};$$

d'où

$$\frac{\sin\widehat{ABD}}{\sin\widehat{DBC}} = \frac{AD}{DC} \times \frac{\sin A}{\sin C}.$$

On a de même, dans les triangles AEF et DEF,

$$\frac{\sin\widehat{AEF}}{AF} = \frac{\sin A}{EF}, \quad \frac{\sin DEF}{DF} = \frac{\sin D}{EF};$$

d'où

$$\frac{\sin\widehat{AEF}}{\sin\widehat{DEF}} = \frac{AF}{DF}\frac{\sin A}{\sin D}.$$

D'autre part, les deux triangles ABF et DCF donnent

$$\frac{AF}{\sin B} = \frac{AB}{\sin\widehat{AFB}}, \quad \frac{DF}{\sin C} = \frac{CD}{\sin\widehat{AFB}},$$

d'où

$$\frac{AF}{DF} = \frac{AB}{CD} \times \frac{\sin B}{\sin C},$$

et par suite

$$\frac{\sin\widehat{AEF}}{\sin\widehat{DEF}} = \frac{AB}{CD} \times \frac{\sin A \sin B}{\sin C \sin D}.$$

Enfin les deux triangles CAB et CAD donnent

$$\frac{\sin\widehat{CAB}}{\sin\widehat{CAD}} = \frac{CB}{CD}\frac{\sin B}{\sin D}.$$

Remplaçons dans (15), et nous aurons

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \times \frac{AD}{CD} \times \frac{\sin A}{\sin C} + \frac{1}{d_2} \times \frac{AB}{CD} \times \frac{\sin A \sin B}{\sin C \sin D} - \frac{1}{d_3} \times \frac{CB}{CD} \times \frac{\sin B}{\sin D} = 0,$$

ou encore, sous une forme tout à fait symétrique,

$$(16)\quad \left\{ \frac{CD \sin C \sin D}{d} - \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} + \frac{AB \sin A \sin B}{d_2} - \frac{BC \sin C \sin B}{d_3} = 0. \right.$$

Ainsi :

THÉORÈME II. — *Si, dans une conique, les quatre côtés d'un quadrilatère sont tangents à une même branche de courbe, et si l'on multiplie chaque côté du quadrilatère par les sinus des angles adjacents, puis que l'on divise par la distance du foyer au côté opposé, la somme des résultats correspondant à deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.*

5. On démontrerait d'une manière analogue le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si un quadrilatère est circonscrit à une hyperbole de telle sorte qu'il y ait deux côtés tangents à chaque branche, en opérant comme dans le théorème II, la différence des résultats correspondant à deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres.*

On aurait donc, dans ce cas,

$$(17)\quad \left\{ \frac{AB \sin A \sin B}{d_2} - \frac{CD \sin C \sin D}{d} = \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} - \frac{CB \sin C \sin B}{d_3}. \right.$$

Remarque. — Les théorèmes II et III pouvaient être déduits des théorèmes I et II de la première Partie. Nous avons préféré la démonstration précédente, qui nous semble plus élémentaire.

Corollaire I. — *Dans tout quadrilatère inscriptible circonscrit à une ellipse, si l'on divise chaque côté par la distance du foyer au côté opposé, la somme des rapports correspondant à deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.*

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{d_2}+\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{d}=\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{d_1}+\frac{\text{CB}\sin\text{C}\sin\text{B}}{d_3}.$$

Si le quadrilatère devient inscriptible, on a

$$\sin\text{A}\sin\text{B}=\sin\text{C}\sin\text{D}=\sin\text{A}\sin\text{D}=\sin\text{C}\sin\text{B},$$

et, par suite, en supprimant le facteur commun $\sin\text{A}\sin\text{B}$,

$$(18)\qquad \frac{\text{AB}}{d_2}+\frac{\text{CD}}{d}=\frac{\text{AD}}{d_1}+\frac{\text{CB}}{d_3}.$$

Corollaire II. — *Dans tout quadrilatère inscriptible circonscrit à une hyperbole et tel qu'il y ait deux côtés tangents à chaque branche, en opérant comme précédemment, la différence des rapports relatifs à deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres.*

Car si le quadrilatère devient inscriptible, la relation

$$\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{d_2}-\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{d}=\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{d_1}-\frac{\text{CB}\sin\text{C}\sin\text{B}}{d_3}$$

devient

$$(19)\qquad \frac{\mathrm{AB}}{d_2} - \frac{\mathrm{CD}}{d} = \frac{\mathrm{AD}}{d_1} - \frac{\mathrm{CB}}{d_3}.$$

6. Nous pouvons maintenant démontrer bien facilement le théorème I.

Considérons d'abord le cas de l'ellipse. Si le quadrilatère devient un parallélogramme, la relation (16) devient

$$\mathrm{AB}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d_2}\right) = \mathrm{BC}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}\right),$$

ou

$$\mathrm{AB} \times d_1 d_3 (d + d_2) = \mathrm{BC} \times d d_2 (d_1 + d_3).$$

Or

$$\mathrm{AB}(d + d_2) = \mathrm{BC}(d_1 + d_3) = \mathrm{S},$$

S désignant la surface du parallélogramme. Il en résulte

$$d_1 d_3 = d d_2.$$

Considérons maintenant le cas de l'hyperbole. Si le quadrilatère devient un parallélogramme, la relation (17) devient

$$\mathrm{AB}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_2}\right) = \mathrm{BC}\left(\frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_1}\right),$$

ou

$$\mathrm{AB} \times d_1 d_3 (d_2 - d) = \mathrm{BC} \times d d_2 (d_1 - d_3).$$

Or

$$\mathrm{AB}(d_2 - d_1) = \mathrm{BC}(d_1 - d_3) = \mathrm{S},$$

d'où

$$d_1 d_3 = d d_2.$$

APPLICATION A LA DÉTERMINATION DES FOYERS.

7. Nous ne traiterons que le cas de l'ellipse, le cas de l'hyperbole s'en déduisant simplement.

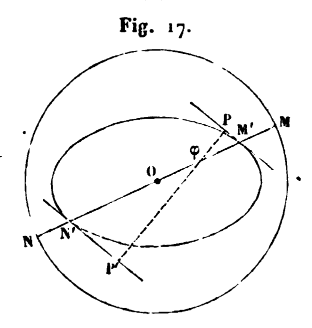
Nous avons vu que le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes est une circonférence.

Par raison de symétrie, cette circonférence aura pour

centre le centre de la courbe; et, comme les tangentes sont extérieures à l'ellipse, elle sera tout entière extérieure à l'ellipse.

Supposons que le foyer soit un point quelconque φ intérieur à la courbe (*fig.* 17). Menons le diamètre φMN.

Fig. 17.



Il est visible sur la figure que l'on a

$$\varphi M > \varphi M', \quad \varphi N > \varphi N',$$

d'où

$$\varphi M \times \varphi N > \varphi M' \times \varphi N',$$

M et N étant les points de rencontre avec la circonférence, lieu des projections des tangentes.

D'autre part, si l'on mène les perpendiculaires φP et φP' sur les tangentes en M' et N', on a

$$\varphi M' > \varphi P, \quad \varphi N' > \varphi P',$$

d'où

$$\varphi M' \times \varphi N' > \varphi P \times \varphi P',$$

et par suite

$$\varphi M \times \varphi N > \varphi P \times \varphi P'.$$

Mais les quatre points M, N, P et P' doivent appartenir à la même circonférence, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\varphi M \times \varphi N = \varphi P \times \varphi P'.$$

Cette égalité, comparée avec l'inégalité précédente, exige que M et P coïncident d'une part, N et P' de l'autre; par conséquent, que le diamètre MN soit normal à la courbe, car M et P ne peuvent coïncider qu'au point M'.

Ainsi les foyers sont sur l'un des axes. Ils ne peuvent évidemment pas être sur le petit axe, et ils seront par suite sur le grand axe. La circonférence lieu des projections des foyers devient alors la circonférence circonscrite et le produit constant devient égal à b^2.

Si donc on désigne par c la distance d'un foyer au centre on devra avoir

$$(a+c)(a-c)=b^2,$$

ou

$$a^2-c^2=b^2 \quad \text{et} \quad c^2=a^2-b^2.$$

Remarque. — Dans le cas de la parabole, il faudrait commencer par exprimer que la courbe représentée par l'équation (4) représente une parabole, ce qui donnerait une relation entre les distances d'un foyer à trois tangentes. Cette relation servirait à déterminer le foyer.

RELATION ENTRE QUATRE CONIQUES INSCRITES DANS LE MÊME QUADRILATÈRE.

8. Reprenons la relation (16)

$$\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{d_2}+\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{d}-\frac{\text{BC}\sin\text{B}\sin\text{C}}{d_3}-\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{d_1}=0.$$

Soit C_i une conique inscrite dans le quadrilatère ABCD et soient x_i, y_i, z_i, u_i les distances de son foyer aux côtés du quadrilatère.

Faisant varier i de 0 à 3, on aura

$$\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{x}-\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{y}+\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{z}-\frac{\text{BC}\sin\text{B}\sin\text{C}}{u}=0,$$

$$\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{x_1}-\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{y_1}+\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{z_1}-\frac{\text{BC}\sin\text{B}\sin\text{C}}{u_1}=0,$$

$$\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{x_2}-\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{y_2}+\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{z_2}-\frac{\text{BC}\sin\text{B}\sin\text{C}}{u_2}=0,$$

$$\frac{\text{CD}\sin\text{C}\sin\text{D}}{x_3}-\frac{\text{AD}\sin\text{A}\sin\text{D}}{y_3}+\frac{\text{AB}\sin\text{A}\sin\text{B}}{z_3}-\frac{\text{BC}\sin\text{B}\sin\text{C}}{u_3}=0.$$

En éliminant les quatre quantités qui entrent aux numérateurs, on aura

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{u_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{z_3} & \frac{1}{u_3} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation cherchée. Elle donne le lieu géométrique des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Si parmi ces quatre coniques il y a un cercle, la relation précédente devient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{u_2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

SUR LA CONSTRUCTION D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE AUTOUR D'UN DE SES POINTS

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

II.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

1. Soient

$F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe;

(1) *Voir* même Tome, p. 354.

$f(x, y)$ l'ensemble homogène des termes de degré m de F ;

$g(x, y)$ l'ensemble homogène des termes de degré $m - 1$, ...

L'équation de la courbe sera de la forme

$$f(x, y) + g(x, y) + h(x, y) + \ldots = 0. \tag{1}$$

Coupons la courbe par la droite

$$x = x_0 + ar,$$
$$y = y_0 + br.$$

L'équation de degré m qui nous fournit les m valeurs de r qui conviennent aux points d'intersection de la droite et de la courbe est de la forme

$$U_0 r^m + U_1 r^{m-1} + U_2 r^{m-2} + \ldots + U_m = 0. \tag{2}$$

Les coefficients U_0, U_1, U_2, ... sont des fonctions de x_0, y_0 dont le degré est marqué par l'indice et qui ont pour expression

$$U_0 = f(a, b),$$
$$U_1 = x_0 f'_a + y_0 f'_b + g(a, b),$$
$$U_2 = \frac{1}{1.2}[x_0^2 f''_{a^2} + 2x_0 y_0 f''_{ab} + y_0^2 f''_{b^2} + 2x_0 g'_a + 2y_0 g'_b + h(a, b)],$$

....

Cela posé, si la transversale est choisie de manière que $f(a, b) = 0$, l'une des racines de cette équation devient infinie, et, pour qu'un second point de rencontre de la droite avec la courbe passe à l'infini, il faut en outre que $U_1 = 0$, c'est-à-dire que le point (x_0, y_0) soit situé sur la droite

$$x f'_a + y f'_b + g(a, b) = 0. \tag{3}$$

Nous allons démontrer que, si les coordonnées x_0, y_0, n'annulent pas U_2, la courbe $F(x, y) = 0$ est asymptote

à la droite dont l'équation est

$$xf'_a + yf'_b + g(a, b) = 0.$$

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ les $m - 1$ racines de l'équation

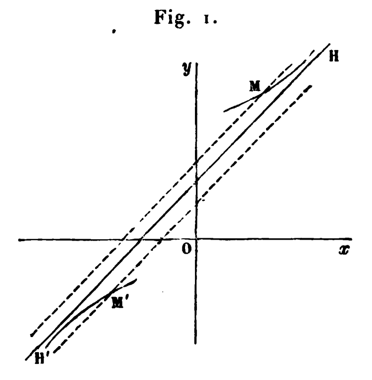
$$(4) \qquad U_1 r^{m-1} + U_2 r^{m-2} + \ldots + U_m = 0.$$

On aura

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1} = -\frac{U_2(x_0, y_0)}{U_1(x_0, y_0)}.$$

Quand U_1 tend vers zéro, c'est-à-dire quand la transversale se déplace parallèlement à la droite (3), jusqu'à coïncider avec cette droite, une seule racine de l'équation (4) tend vers l'infini. Soit r_1 cette racine, elle a évidemment le signe de $-\frac{U_2}{U_1}$; elle engendre une branche de courbe asymptote à la droite. Lorsque U_1 change de signe, c'est-

Fig. 1.



à-dire lorsque la transversale passe de l'autre côté de la droite (3), on obtient sur cette transversale un point dans une direction opposée à la première, et ce point engendre une seconde branche de courbe asymptote à la même droite.

On obtient une disposition analogue à celle que présente

la *fig.* 1, et le signe des quantités $\frac{U_2}{U_1}$ et U_1 donne la disposition de la courbe par rapport à l'asymptote. Si U_2 n'est pas divisible par U_1, on peut substituer à la place de x_0, y_0 dans U_2 les coordonnées d'un point de l'asymptote et prendre pour le signe invariable de U_2 le signe que prendra cette fonction quand on y substitue les coordonnées de ce point.

2. Supposons maintenant que la fonction U_2 soit divisible par U_1, et soit

$$U_2 = U_1 V_1.$$

Lorsque U_1 tend vers zéro, deux racines de l'équation (4) tendent vers l'infini; supposons que U_3 ne soit pas divisible par U_1; U_3 conservera un signe invariable quand le point (x_0, y_0) se déplacera dans le voisinage de l'asymptote.

Soient r_1, r_2 les deux racines qui augmentent indéfiniment, on aura les relations

$$(a) \qquad r_1 + r_2 = -(V_1 + S_1),$$

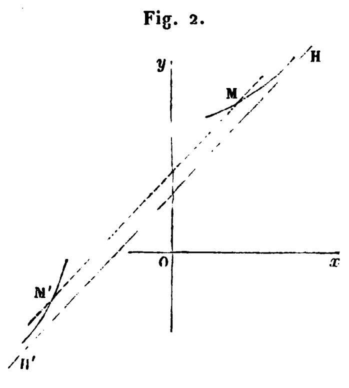
$$(b) \qquad r_1 r_2 = \frac{U_3}{U_1} + (V_1 + S_1)S_1 - S_2,$$

$$(c) \quad (r_1 - r_2)^2 = (V_1 + S_1)^2 - 4\frac{U_3}{U_1} - 4S_1(V_1 + S_1) + 4S_2,$$

S_1 étant la somme des racines $r_3, r_4, \ldots, r_{m-1}$ et S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités. On voit par ces formules que r_1 et r_2 ne sont réels qu'autant que U_3 et U_1 sont de signe contraire, car c'est le terme $-4\frac{U_3}{U_1}$ qui donne son signe au second membre; la formule (*a*) nous montre de plus que r_1 et r_2 sont de signe contraire. La courbe est donc tout entière d'un même côté de l'asymptote, et la formule (*c*) nous indique

quel est ce côté. On obtient un point d'inflexion à l'infini et des branches de courbes analogues à celle de la *fig.* 2.

Fig. 2.



3. Supposons maintenant que U_1 soit identiquement nul, U_2 sera décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré, et l'équation $U_2(x, y) = 0$, qui, dans le cas précédent, représente une hyperbole ayant pour l'une de ses asymptotes la droite HH' représentée par l'équation (3), représente maintenant un système de deux droites parallèles, comme il est aisé de le faire voir. L'équation $U_3(x, y) = 0$ représente une courbe du troisième degré qui a pour asymptotes les deux parallèles représentées par $U_2(x, y) = 0$; U_3 conserve donc un signe invariable quand on substitue, pour x_0, y_0, les coordonnées d'un point suffisamment voisin de l'une des deux droites

$$U_2(x, y) = 0.$$

Soit $U_2 = UV$, U et V étant les deux fonctions linéaires qui sont les premiers membres des équations des deux parallèles représentées par $U_2 = 0$.

On verra, comme dans le premier cas, que chacune des deux droites $U = 0$, $V = 0$ est accompagnée de branches de courbe asymptotes à chacune de ces droites et la disposition des branches autour de chaque asymptote est

donnée par la formule

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-2} = - \frac{U_3}{UV},$$

le signe de la racine r_1 qui augmente indéfiniment étant donné dans les deux cas par le signe du second membre.

La courbe se construit donc séparément autour de chaque asymptote.

4. Supposons maintenant que $U_2(x, y)$ soit le carré d'une fonction linéaire

$$U_2 = U^2.$$

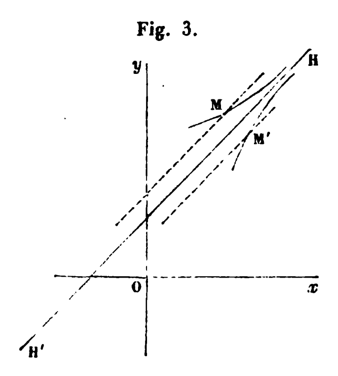
La racine qui augmente indéfiniment ne change pas de signe quand le point (x_0, y_0) passe d'un côté à l'autre de la droite $U = 0$; on obtient dans ce cas deux branches de courbe asymptotes de part et d'autre à cette droite et dans la même direction.

Le point est de rebroussement à l'infini et la formule

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-2} = - \frac{U_3}{U^2}$$

nous donne, par le signe permanent du deuxième membre,

Fig. 3.



le signe de la racine infiniment grande, et par suite la région où se trouve la courbe. On obtient la *fig.* 3.

5. Supposons U_3 divisible par U et soit

$$U_3 = UV_2.$$

L'équation aux rayons vecteurs prend la forme

$$(5) \qquad r^{m-2}U^2 + r^{m-3}UV_2 + r^{m-4}U_4 + \ldots + U_m = 0.$$

Quand U tend vers zéro, deux racines r_1 et r_2 de l'équation (5) tendent vers zéro, et l'on a, comme précédemment, les relations

$$(a') \qquad r_1 + r_2 = -\left(\frac{V_2}{U} + S_1\right),$$

$$(b') \qquad r_1 + r_2 = \frac{U_4}{U^2} + \left(\frac{V_2}{U} + S_1\right) S_1 - S_2,$$

$$(c') \quad (r_1 - r_2)^2 = \left(\frac{V_2}{U} + S_1\right)^2 - 4\left[\frac{U_4}{U^2} + \left(\frac{V_2}{U} + S_1\right) S_1 - S_2\right].$$

La formule (c') peut aussi s'écrire

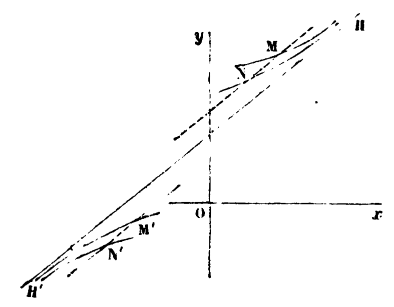
$$(c'_1) \qquad (r_1 - r_2)^2 = \frac{V_2^2 - 4U_4 + UW}{U^2},$$

où l'on a posé

$$W = -2V_2S_1 + U(4S_2 - 3S_1^2).$$

Si $V_2^2 - 4U_4 > 0$, les racines r_1 et r_2 sont réelles, et,

Fig. 4.



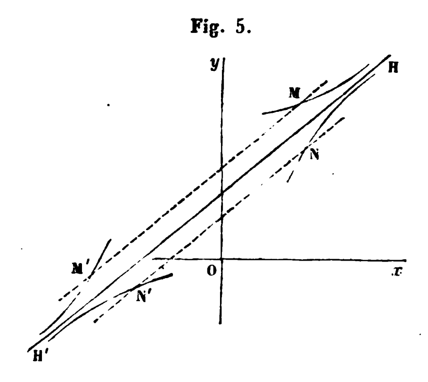
suivant que U_4 est positif ou négatif, on obtient des dispositions de courbes représentées par les *fig.* 4 ou 5.

Le signe de V_2 nous donne, dans le cas de la *fig.* 4, la position des branches de courbe.

L'asymptote dans ce cas est double et de rebroussement.

Si $V_2^2 - 4U_4 < 0$, les racines r_1 et r_2 sont imaginaires, aucune branche réelle de courbe n'accompagne

Fig. 5.



l'asymptote. Le point de rebroussement à l'infini est isolé.

Si $V_2^2 - 4U_4 = 0$, la fonction $V_2^2 - 4U_4$ est divisible par U.

Soit Q le quotient. La formule (c'_1) devient alors

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{Q - 2V_2S_1 + U(4S_2 - 3S_1^2)}{U};$$

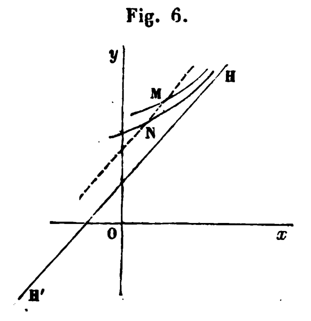
pour que r_1 et r_2 soient réels, il faut que $Q - 2V_2S_1$ soit de même signe que U; on n'obtient donc de points de la courbe que d'un côté de l'asymptote. De plus, les racines r_1 et r_2 sont de même signe; l'égalité $V_2^2 - 4U_4 = 0$ montre en effet que U_4 est positif.

On obtient un rebroussement de deuxième espèce; la formule (a') donne la position de la courbe avec (c'_1).

Le cas où plus de deux racines augmentent indéfini-

ment se traite de la même manière que pour le point à distance finie. L'analogie entre la discussion du point à

Fig. 6.



l'infini et celle du point à distance finie est d'ailleurs complète.

6. Nous allons, en terminant, montrer que la méthode de Cauchy se prête à une discussion toute semblable.

Soient toujours

$$(1') \qquad F(x,y) = f(x,y) + g(x,y) + h(x,y) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe,

$$y = ax + \lambda$$

l'équation d'une droite quelconque.

L'équation qui donne les abscisses des points communs à cette droite et à la courbe est

$$f(x, ax+\lambda) + g(x, ax+\lambda) + h(x, ax+\lambda) + \ldots = 0,$$

ou

$$x^m f\left(1, a+\frac{\lambda}{x}\right) + x^{m-1} g\left(1, a+\frac{\lambda}{x}\right) + x^{m-2} h\left(1, a+\frac{\lambda}{x}\right) + \ldots = 0.$$

En développant les coefficients des diverses puissances de x par la formule de Taylor, on obtient l'équation

$$x^m f(1, a) + x^{m-1}[\lambda f'(1, a) + g(1, a)] \\ + x^{m-2}\left[\lambda^2 f''\frac{(1, a)}{1.2} + \frac{\lambda}{1} g'(1, a) + h(1, a)\right] + \ldots = 0.$$

Si a est une direction asymptotique $f(1, a) = 0$, l'équation aux abscisses prend la forme

$$x^{m-1} U_1(\lambda) + x^{m-2} U_2(\lambda) + \ldots + U_m(\lambda) = 0.$$

En posant

$$U_1(\lambda) = \lambda f'(1, a) + g(1, a),$$
$$U_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{1.2} f''(1, a) + \frac{\lambda}{1} g'(1, a) + h(1, a),$$

on obtient ainsi une équation qui se prête à une discussion identique à celle que nous avons faite sur l'équation aux rayons vecteurs.

On voit que les circonstances que nous avons étudiées précédemment se représenteront ici dans le même ordre; il est donc inutile de nous y arrêter, et nous allons passer à l'étude des branches de courbes dépourvues d'asymptotes et correspondant à des directions multiples de points à l'infini.

La méthode que nous emploierons peut également servir à construire les branches hyperboliques, c'est-à-dire accompagnées d'asymptotes, et en cela elle est remarquable.

Il n'y a d'exception que pour le cas où l'asymptote passe par l'origine, et ce cas peut toujours être étudié directement avec une grande facilité.

III.

BRANCHES PARABOLIQUES.

1. Soit

(1) $F(x,y) = f_m(x,y) + f_{m-1}(x,y) + \ldots + f_0(x,y) = 0$

l'équation de la courbe.

$f_\mu(x,y)$ désigne l'ensemble homogène des termes de degré μ de $F(x,y)$.

Soit

$$y = ax + \frac{1}{\lambda}$$

une transversale quelconque.

Formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de concours de la droite et de la courbe.

L'équation de ce faisceau sera, comme l'on sait,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_m(x,y) + \lambda(y - ax) f_{m-1}(x,y) \\ & \quad + \lambda^2 (y - ax)^2 f_{m-2}(x,y) + \ldots + \lambda^m (y - ax)^m f_0 = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{y}{x} - a\right) f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots \\ & \qquad\qquad + \lambda^m \left(\frac{y}{x} - a\right)^m f = 0 \end{aligned} \right.$$

Posons

$$f_\mu\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_\mu\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} - a = t,$$

on aura pour l'équation du faisceau

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_m(a+t) + \lambda t \varphi_{m-1}(a+t) \\ & \quad + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(a+t) + \ldots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0 \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_m(a) \\ & + t\ [\varphi'_m(a) + \lambda\varphi_{m-1}(a)] \\ & + t^2 \left[\frac{1}{1.2}\varphi''_m(a) + \lambda\varphi'_{m-1}(a) + \lambda^2\varphi_{m-2}(a)\right] \\ & + t^3 \left[\frac{1}{1.2.3}\varphi'''_m(a) + \lambda\frac{\varphi''_{m-1}}{1.2}(a) + \frac{\lambda^2}{1}\varphi'_{m-2}(a) + \lambda^3\varphi_{m-8}(a)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est de la forme

$$(6)\qquad U_0 + tU_1(\lambda) + t^2U_2(\lambda) + \ldots + t^mU_m(\lambda) = 0,$$

$U_\mu(\lambda)$ étant un polynôme de degré μ en λ, à savoir :

$$U_\mu(\lambda) = \frac{1}{\mu!}\varphi_m^{(\mu)}(a) + \frac{\lambda}{(\mu-1)!}\varphi_{m-1}^{(\mu-1)}(a) + \frac{\lambda^2}{(\mu-2)!}\varphi_{m-2}^{(\mu-1)}(a) + \ldots + \lambda^\mu\varphi_{m-\mu}(a).$$

Si a est une direction de points à l'infini

$$\varphi_m(a) = 0,$$

par suite, l'équation (6) est divisible par t, et, après la suppression du facteur t, elle devient

$$(7)\qquad U_1(\lambda) + tU_2(\lambda) + \ldots + t^{m-1}U_m(\lambda) = 0;$$

Si $\varphi'_m(a) \gtrless 0$, et si $U_2(\lambda)$ n'est pas divisible par $U_1(\lambda)$, une seule des racines de l'équation en t tendra vers zéro quand λ tend vers la racine λ_0 de l'équation

$$U_1(\lambda) = 0.$$

Cette racine engendre une branche hyperbolique asymptote à la droite

$$y = ax + \frac{1}{\lambda_0},$$

et la discussion de l'équation (7) donne la position des branches par rapport à l'asymptote. Nous ne nous y ar-

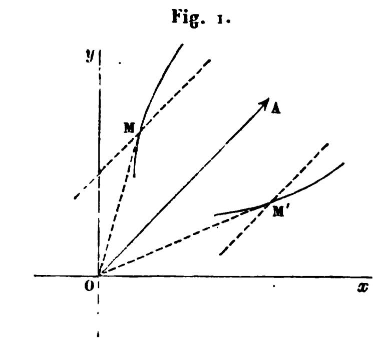
rêterons pas, et nous allons supposer immédiatement que cette racine λ_0 de U_1 soit nulle, c'est-à-dire $\varphi'_m(a) = 0$.

Dans ce cas, quand λ tend vers zéro, une seule racine de l'équation en t tend vers zéro [$U_2(\lambda)$ n'étant pas divisible par λ]; le signe de cette racine est donné par l'égalité

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{m-1}} = -\frac{U_2(\lambda)}{U_1(\lambda)}.$$

La racine t_1 qui tend vers zéro a évidemment le signe de $-\frac{\varphi''_m(a)}{\lambda\varphi_{m-1}(a)}$; elle engendre une branche parabolique qui a la disposition de la *fig.* 1 où l'on suppose $\frac{\varphi''_m(a)}{\varphi_{m-1}(a)} < 0$.

Fig. 1.



Si l'on suppose U_1 et U_2 divisibles par λ, on obtient l'analogue du point d'inflexion; les deux branches sont toutes deux d'un même côté de OA: on le reconnaît aisément. Dans ce cas, deux racines de l'équation (7) tendent vers zéro.

2. Si U_1 est identiquement nul, $U_2(\lambda)$ étant, en général, décomposable en facteurs du premier degré,

$$U_2 = UV,$$

chacune des racines λ_0 et λ_1 de l'équation $U_2(\lambda) = 0$ donne une asymptote à des branches hyperboliques de courbe que nous construirons comme précédemment. Mais si l'une de ces racines est nulle, à la racine non nulle correspond une branche hyperbolique et à la racine nulle une branche parabolique aisée à construire si U_3 n'admet pas λ en facteur.

La forme de la courbe sera celle de la *fig.* 1.

3. Supposons maintenant que les deux racines de l'équation $U_2(\lambda)$ soient nulles, et $U_3(\lambda)$ non divisibles par λ; la racine t_1 qui tend vers zéro a le signe de

$$-\frac{\varphi'''_m(a)}{\varphi_{m-2}(a)},$$

et ce signe est le même, quel que soit le signe de λ. On obtient donc une branche de courbe de la forme de la

Fig. 2.

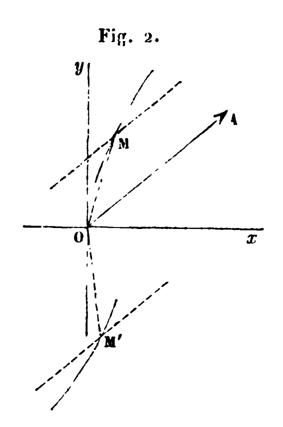


fig. 2 qui correspond au rebroussement de première espèce. Nous avons, pour cela, supposé

$$\varphi_m(a) = 0, \quad \varphi'_m(a) = 0, \quad \varphi''_m(a) = 0,$$
$$\varphi_{m-1}(a) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(a) = 0.$$

4. Supposons $U_3(\lambda)$ divisible par λ; dans ce cas, deux racines de l'équation

$$(8)\quad U_2(\lambda) + tU_3(\lambda) + t^2U_4(\lambda) + \ldots + t^{m-2}U_m(\lambda) = 0$$

tendent vers zéro; on a, dans ce cas, les formules

$$(a)\qquad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = -\left[\frac{1}{1.2}\,\frac{\varphi''_{m-1}(a)}{\varphi_{m-2}(a)} + \lambda\,\Phi_1(\lambda)\right]\frac{1}{\lambda},$$

$$(b)\qquad \frac{1}{t_1 t_2} = \left[\frac{1}{4!}\,\frac{\varphi^{\text{IV}}_m(a)}{\varphi_{m-2}(a)} + \lambda\,\Phi_2(\lambda)\right]\frac{1}{\lambda^2},$$

$$(c)\quad \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)^2 = \left[\frac{\frac{1}{4}\varphi''^2_{m-1}(a) - \frac{1}{6}\varphi_{m-2}(a)\varphi^{\text{IV}}_m(a)}{\varphi^2_{m-2}(a)} + \lambda\psi(\lambda)\right]\frac{1}{\lambda^2}.$$

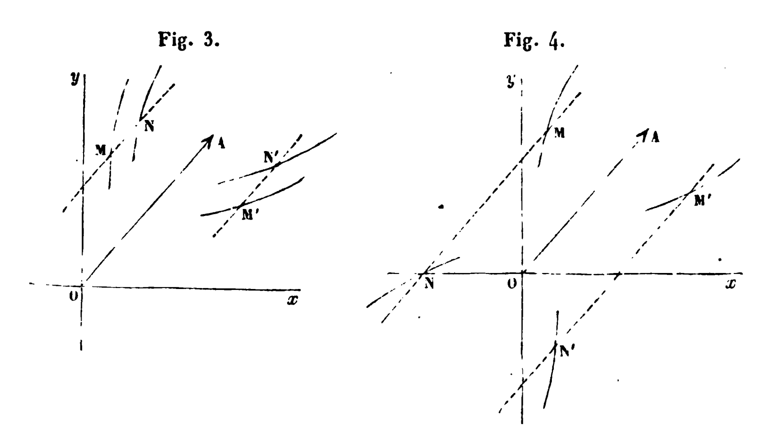
Si

$$\tfrac{1}{4}\varphi''^2_{m-1}(a) - \tfrac{1}{6}\varphi_{m-2}(a)\varphi^{\text{IV}}_m(a) > 0,$$

les racines t_1 et t_2 sont réelles et inégales; chacune d'elles, quand λ tend vers zéro, engendre une branche parabolique.

Si $\dfrac{\varphi^{\text{IV}}_m(a)}{\varphi_{m-2}(a)} > 0$, on obtient une disposition analogue à

Fig. 3. Fig. 4.



la *fig* 3, et si $\dfrac{\varphi^{\text{IV}}_m(a)}{\varphi_{m-2}(a)} < 0$, on obtient la *fig*. 4. Le signe

de $\frac{\varphi''_{m-1}(a)}{\varphi_{m-2}(a)}$ donne, dans le cas de la *fig*. 3, la région où se trouvent les courbes.

Si

$$\tfrac{1}{4}\varphi''^{2}_{m-1}(a) - \tfrac{1}{6}\varphi_{m-2}(a)\varphi^{\text{IV}}_{m}(a) < 0,$$

le point à l'infini dans la direction a est isolé, les branches sont imaginaires.

5. Mais, si

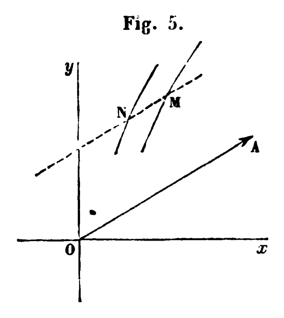
$$\tfrac{1}{4}\varphi''^{2}_{m-1}(a) - \tfrac{1}{6}\varphi_{m-2}(a)\varphi^{\text{IV}}_{m}(a) = 0,$$

les deux racines t_1 et t_2 ne sont plus réelles, quel que soit le signe de λ; par suite, la courbe se trouve d'un même côté de OA; $\varphi_{m-2}(a)\varphi^{\text{IV}}_{m}(a)$ étant positif, les racines t_1 et t_2 sont de même signe.

On obtient une disposition analogue à celle de la *fig*. 5.

Les développements que nous avons donnés en traitant de la construction de la courbe autour de l'origine nous

Fig. 5.



dispensent d'entrer dans de plus amples détails. On verrait aisément comment il faudrait opérer dans des cas plus complexes que ceux que nous avons traités.

QUESTION D'ASTRONOMIE;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Étant données les durées des quatre saisons de l'année astronomique ($92\frac{7}{8}$, $93\frac{7}{12}$, $89\frac{71}{96}$, $89\frac{1}{24}$ *jours*), *trouver l'excentricité de l'orbite de la Terre.*

(*Nouvelle Correspondance mathémat.*, nov. 1878.)

Désignons par t_1, t_2, t_3 et t_4 les durées de l'hiver, du printemps, de l'été et de l'automne; par s_1, s_2, s_3 et s_4 les secteurs elliptiques correspondants; par T la durée d'une révolution complète et par S l'aire de l'orbite. D'après la loi des aires, nous pouvons écrire

$$\frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s_4+s_1}{t_4+t_1} = \frac{S}{T}.$$

Nous sommes conduits à calculer les segments elliptiques s_1+s_2 et s_4+s_1.

Or, en prenant pour axe polaire la ligne des solstices, et en désignant par α l'angle que fait cette droite avec le grand axe, l'équation de la courbe est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\omega-\alpha)}.$$

Donc

$$s_1+s_2 = \frac{a^2}{2}(1-e^2)^2\int_0^\pi \frac{d\omega}{[1+e\cos(\omega-\alpha)]^2}$$

$$= a^2\sqrt{1-e^2}\left[\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\text{tang}\,\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \frac{e}{2}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(\omega-\alpha)}{1+e\cos(\omega-\alpha)}\right]_0^\pi$$

$$= a^2\sqrt{1-e^2}\left(\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin\alpha} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{e\sin\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha}\right).$$

De même, en prenant l'intégrale entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$s_4 + s_1 = a^2\sqrt{1-e^2}\left(\text{arc tang}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\cos\alpha} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{e\cos\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha}\right).$$

D'ailleurs,

$$S = \pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

On a donc, pour déterminer e et α, les deux équations

$$(1)\quad \text{arc tang}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin\alpha} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{e\sin\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha} = \pi\frac{t_1+t_2}{T},$$

$$(2)\quad \text{arc tang}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\cos\alpha} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{e\cos\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha} = \pi\frac{t_4+t_1}{T}.$$

Pour les résoudre, nous poserons d'abord

$$(3)\qquad \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin\alpha} = \text{tang}\,u;$$

d'où

$$e\sin\alpha = \sqrt{1-e^2}\cot u,$$

$$1 - e^2\cos^2\alpha = (1-e^2)(1+\cot^2 u).$$

Par suite, l'équation (1) deviendra

$$u - \frac{\cot u}{1+\cot^2 u} = \pi\frac{t_1+t_2}{T},$$

ou

$$2u - \sin 2u = 2\pi\frac{t_1+t_2}{T},$$

ou encore, en faisant $2u = u_1$,

$$(4)\qquad u_1 - \sin u_1 = 2\pi\frac{t_1+t_2}{T}.$$

En posant de même

$$(5)\qquad \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\cos\alpha} = \text{tang}\,v,$$

l'équation (2) deviendra

$$2v - \sin 2v = 2\pi \frac{t_4 + t_1}{T},$$

ou encore

$$(6) \qquad v_1 - \sin v_1 = 2\pi \frac{t_4 + t_1}{T}.$$

Les angles u et v sont ainsi déterminés par les équations transcendantes (4) et (6). Ensuite, en divisant membre à membre l'équation (5) par l'équation (3), on aura

$$(7) \qquad \tang\alpha = \frac{\tang v}{\tang u},$$

d'où l'on déduira α. Il suffira alors de poser

$$(8) \qquad e = \cos x,$$

pour que l'équation (3) donne

$$(9) \qquad \tang x = \sin\alpha \tang u.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire l'application de ces formules aux données de l'énoncé.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(SECONDE SESSION, 1882)

(voir même Tome, p. 92).

SOLUTION DE M. E. BARISIEN,

Lieutenant au 141ᵉ d'infanterie, à Dra-el-Mizan.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY *et deux points* H *et* H', *le premier défini par ses coordonnées* a, b; *le second symétrique du premier par rapport au point* O.

Par ce dernier point, on mène une droite indéfinie

DOE *formant avec l'axe* OX *un angle* DOX $= \theta$; *on projette les points* H, H' *sur cette droite en* h, h'.

On projette le point h *en* u *sur l'axe* OX, *et le point* u *en* u_1 *sur la droite* DOE.

On projette le point h' *en* v *sur l'axe* OY *et le point* v *en* v_1 *sur la droite* DOE.

(*Toutes ces projections sont orthogonales.*)

Enfin, sur la longueur $u_1 v_1$ *comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle* $u_1 v_1$S, *en menant* v_1S *parallèle à* OX *et* u_1S *parallèle à* OY (1).

Cela posé, on demande :

1° *De trouver les coordonnées du point* S *en fonction des trois constantes* a, b, θ;

2° *D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point* S *pour sommet et la droite* DOE *pour directrice*;

3° *De démontrer que le lieu des foyers de toutes les paraboles obtenues en faisant varier l'angle* θ *se compose du système de deux circonférences de cercle ;*

4° *De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées ;*

5° *De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent toutes en un même point.*

1° Soient α et β les coordonnées x, y du point S, et K la projection du point H sur l'axe OX.

Si nous projetons sur OD le contour OKHhO, il viendra, en posant O$h = r$,

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta.$$

D'autre part,

$$\alpha = Ou_1 \cos\theta,$$
$$Ou_1 = Ou\cos\theta = r\cos^2\theta,$$
$$Ou = Oh\cos\theta = r\cos\theta,$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

(1) $$\alpha = r\cos^3\theta.$$

De même

$$\beta = -\,Ov_1 \sin\theta = -\,Ov \sin^2\theta,$$

(2) $$\beta = -\,r\sin^3\theta.$$

En remplaçant dans les égalités (1) et (2) r par sa valeur

$$a\cos\theta + b\sin\theta,$$

on aura les coordonnées α, β du point S, en fonction des trois constantes a, b, θ.

2° Menons du point S la perpendiculaire Si à la droite DOE. La perpendiculaire Si sera l'axe de la parabole dont S est le sommet, et DOE la directrice. Le foyer F de la parabole s'obtiendra, en prenant sur le prolongement de l'axe iS, à partir du sommet S, SF $=$ Si.

Soient x, y les coordonnées de i, et X, Y les coordonnées de F.

On aura

$$x = Oi\cos\theta \quad \text{et} \quad y = Oi\sin\theta.$$

Mais

$$\begin{aligned} Oi &= Ou_1 - u_1 i \\ &= r\cos^2\theta - u_1 S.\sin\theta = r\cos^2\theta - r(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta)\sin\theta, \end{aligned}$$

d'où

$$Oi = r\cos^2\theta - r\sin^2\theta = r\cos 2\theta.$$

Donc

(3) $$x = r\cos 2\theta\cos\theta,$$

(4) $$y = r\cos 2\theta\sin\theta.$$

Pour déterminer X et Y, nous avons les relations

$$2\alpha = X + x, \quad 2\beta = Y + y;$$

il s'ensuit

$$X = 2\alpha - x = \quad 2r\cos^3\theta - r\cos 2\theta\cos\theta,$$
$$Y = 2\beta - y = -\,2r\sin^3\theta - r\cos 2\theta\sin\theta,$$

ou

$$(5) \qquad X = r\cos\theta$$

et

$$(6) \qquad Y = -r\sin\theta.$$

Ces dernières relations font voir que le point F est le symétrique de h, par rapport à OX [1].

On aura l'équation de la parabole, en exprimant que les distances d'un point quelconque de cette courbe, au foyer F et à la directrice DOE, sont égales entre elles.

L'équation de la directrice DOE étant

$$y\cos\theta - x\sin\theta = 0,$$

l'équation de la parabole est

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2$$

ou

$$(x - r\cos\theta)^2 + (y + r\sin\theta)^2 = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2,$$

ou bien encore

$$(7) \qquad (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 - 2r(x\cos\theta - y\sin\theta) + r^2 = 0,$$

équation dans laquelle

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta.$$

3° Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il faut

---

[1] C'est aussi ce que montre la Géométrie élémentaire, car de l'égalité supposée OH' = OH résulte évidemment

$$Oh' = Oh, \quad Ov = hu, \quad vv_1 = uu_1, \quad vu = v_1u_1 = Oh.$$

Les triangles rectangles u_1v_1S, hOu, étant égaux, $u_1S = hu$, la droite uS est parallèle à hu_1, le point S est sur la droite uv.

En outre, $SF = Si = vv_1$. Donc vF est égale et parallèle à $v_1S = Ou$, par conséquent Fu est perpendiculaire à OX, et de plus égale à uh. C'est-à-dire que F est le symétrique de h, par rapport à OX.

(G.)

éliminer θ entre les équations (5) et (6), qui donnent, en remplaçant r par sa valeur $a\cos\theta + b\sin\theta$:

$$X = (a\cos\theta + b\sin\theta)\cos\theta,$$
$$Y = -(a\cos\theta + b\sin\theta)\sin\theta,$$
$$X^2 + Y^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2,$$

et

$$\frac{\sin\theta}{-Y} = \frac{\cos\theta}{X} = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{aX - bY}.$$

D'où

$$X^2 + Y^2 = \frac{(aX - bY)^2}{X^2 + Y^2};$$
$$(X^2 + Y^2)^2 - (aX - bY)^2 = 0;$$
$$(X^2 + Y^2 - aX + bY)(X^2 + Y^2 + aX - bY) = 0.$$

Le lieu se compose du système des deux circonférences égales, représentées par les équations

$$X^2 + Y^2 - aX + bY = 0,$$

et

$$X^2 + Y^2 + aX - bY = 0.$$

4° En faisant $y = 0$ dans l'équation (7), on obtient

$$(x\cos\theta - r)^2 = 0,$$

ce qui montre que la parabole est tangente à l'axe des x, au point

$$y = 0,\quad x = \frac{r}{\cos\theta}.$$

De même la parabole est tangente à l'axe des y au point

$$x = 0,\quad y = -\frac{r}{\sin\theta}.$$

5° L'équation de la corde des contacts de la parabole avec les axes est

$$\frac{x}{\frac{r}{\cos\theta}} - \frac{y}{\frac{r}{\sin\theta}} = 1,$$

ou

$$x\cos\theta - y\sin\theta = r = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

qui peut s'écrire

$$(x - a)\cos\theta - (y + b)\sin\theta = 0.$$

Sous cette forme, on voit que la droite de contact passe par le point fixe $x = a$, $y = -b$, qui est le point symétrique de H par rapport à l'axe OX.

Note. — La question de Géométrie analytique du Concours d'admission à l'Ecole Centrale (première session 1882), a de même été résolue par M. Barisien; c'est par oubli que sa solution n'a pas été mentionnée dans le numéro de juillet dernier.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (CONCOURS DE 1881)

(voir 3e série, t. I, p. 129);

SOLUTION DE M. HENRI CARTIER,
Élève du lycée d'Angoulême.

On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P *de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée de* P *sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point* M *d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.*

Je prends pour axe des x l'asymptote donnée AX, et pour axe des y la perpendiculaire PA menée de P à l'asymptote.

Soient a l'ordonnée mobile AF, du foyer F situé sur l'axe des y, et p l'ordonnée AP du point P.

L'équation générale des hyperboles considérées est

$$x^2 + (y - a)^2 = (x + ny)^2,$$

et, comme elles passent par le point P, on a

$$(1) \qquad (p - a) = \pm np.$$

La seconde asymptote a pour équation

$$(2) \qquad (1-n^2)y-2nx-2a=0.$$

L'équation de la directrice correspondant au foyer F est

$$(3) \qquad x+ny=0.$$

En éliminant n et a entre les équations (1), (2), (3), on aura l'équation du lieu géométrique proposé.

Les équations (3) et (1) donnent

$$n=-\frac{x}{y}, \quad a=p\left(1\pm\frac{x}{y}\right).$$

En remplaçant n et a par ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$x^2+y^2-2p(y\pm x)=0.$$

Donc, le lieu cherché se compose de deux cercles de rayon $p\sqrt{2}$, passant par l'origine A des coordonnées, et dont les centres ont pour ordonnée p et pour abscisses $+p$ et $-p$.

Note. — La même question a été résolue par M. Hertz, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet.

Solution géométrique de la même question.

Un point F pris arbitrairement sur le prolongement de la perpendiculaire AP à l'asymptote AX donnée peut être considéré comme un foyer de l'une des hyperboles dont il s'agit dans l'énoncé de la question proposée. Et si AM représente la directrice correspondant à ce foyer, et PB une parallèle à l'asymptote AX, menée de P et rencontrant au point B la directrice AM, on aura

$$PB = PF,$$

d'après une proposition connue [1]. Par suite l'angle BFP du triangle rectangle isoscèle BPF sera de 45°.

---

[1] La distance d'un point quelconque P d'une hyperbole à l'un des foyers, F, de cette courbe, est égale à la parallèle à l'une des deux

Cela posé, soit FG la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la directrice AM, le quadrilatère FGBP étant inscriptible, les angles BFP, AGP sont égaux : donc

$$AGP = 45°.$$

En outre, si l'on désigne par M le point d'intersection de la seconde asymptote de l'hyperbole et de la directrice AM, et par R le point d'intersection de AF et d'une parallèle à GP menée de M, on aura évidemment

$$AM = 2\,AG, \quad AR = 2\,AP,$$

et l'angle

$$AMR = AGP = 45°.$$

Donc le point M appartient à l'arc du segment capable de 45°, décrit sur la droite déterminée AR.

Mais il faut observer qu'il y a deux hyperboles passant par le point P, et dont F est un foyer, et AX une asymptote. Ces deux hyperboles sont symétriques, l'une de l'autre, par rapport à la droite AF; d'où résulte finalement que le lieu du point M se compose des arcs de deux segments capables d'un angle de 45°, décrits sur la droite AR des deux côtés de cette droite. (G.)

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique, par M. *H. Faye*, membre de l'Institut. IIe Partie : Astronomie solaire, Théorie de la Lune, Navigation. Grand in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 14fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1883.

Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an 1883, Météorologie, Agriculture, Hygiène. In-18°, avec figures dans le texte. Prix : 2fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1883.

Annuaire pour l'an 1883, publié par le *Bureau des*

asymptotes menée du même point P, et terminée à la rencontre de la directrice correspondant au foyer F.

Longitudes, avec des Notices scientifiques. In-18° de 860 pages, avec figures dans le texte et cartes. Prix : 1fr,50. — Paris, Gauthier-Villars; 1883.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE, rédigées conformément au programme du 2 août 1880, pour les classes de huitième, septième, sixième et cinquième, par M. *A. Ducatel*, professeur au lycée Condorcet. In-8°, avec figures dans le texte. — Paris, G. Masson, 1882.

RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL, par *Carnot*, 5e édition. In-8°. Prix : 4fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS, par *G. Salmon*, traduit de l'anglais sur la 6e édition par MM. *Resal* et *Vaucheret*. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 10fr pour les souscripteurs. — Paris, Gauthier-Villars; 1883.

Le second fascicule est sous presse.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, conforme aux programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des *principales méthodes de la Géométrie moderne*, par MM. *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*. 5e édition, revue et notablement augmentée. In-8° de XLVIII-966 pages, avec 616 figures dans le texte, et 1087 questions proposées. Prix : 16fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1883.

THÉORIE DES NOMBRES PARFAITS, par M. *Jules Carvallo*. In-8°. — Paris, chez l'auteur, 19, villa Saïd; 1883.

INTRODUCTION AUX PRINCIPES MATHÉMATIQUES DES LOIS GÉNÉRALES DU MONDE PHYSIQUE, par M. *A. Picart*. In-8. Prix : 3fr,50. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

TIRAGES A PART.

Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants des formes binaires; par M. R. Perrin. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1883.

Johns Hopkins University circulars; published with the approbation of the Board of Trustees. Vol. II, nos 21 et 24. Baltimore; 1883.

Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure; par M. Genty. Extrait du *Journal de M. Resal,* 3e série, t. VIII; 1882.

Nouvelles formules de quadrature; par M. le général Parmentier. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1882.

Ueber einige Versuche mit statischer Electricität; von V. Dvořák. Separat-Abdruck aus den *Annalen der Physik und Chemie,* neue Folge, Band XIX; 1883.

Sopra un' equazione indeterminata. Nota dell' ingegnere S. Realis. Estratto dal *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche,* tomo XVI; 1883.

Die allustischen Rotationsapparate und Apparate zur Messung der Stärke der Luftschwingungen; von V. Dvořák. Sonderabdruck aus der *Zeitschrift für Instrumentenkunde;* 1883.

Sur diverses questions d'Arithmétique; par M. E. Cesaro. Premier Mémoire. Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège,* 2e série, t. X; 1883.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1391

(voir 3e série, t. I, p. 142);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Soit k la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes. Démontrer que toute courbe parallèle à k peut être engendrée de la même façon.

(LAGUERRE.)

AB de longueur constante, glissant entre OX et OY, enveloppe k. C étant le centre instantané de rotation, O, A, C, B sont sur une même circonférence de diamètre constant égal à $\frac{AB}{\sin XOY}$. La tangente correspondant à la courbe parallèle à k coupe cette circonférence en A′ et B′. La distance de A′B′ à AB étant constante, les arcs AA′ et BB′, et, par suite, les angles AOA′ et BOB′ sont constants; les droites OA′ et OB′ sont donc fixes. D'ailleurs

$$\frac{A'B'}{\sin A'OB'} = \frac{AB}{\sin XOY} = \text{const.}$$

Par conséquent A′B′ a une longueur constante, et le théorème est démontré.

Note. — La même question a été résolue par M. J. Mister, professeur à l'École du Génie civil de Belgique.

Question 1396

(voir 3e série, t. I, p. 192);

PAR M. FRANÇOIS BORLETTI,
Ingénieur à Milan.

Intégrer l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+y(1-3x+x^2)=-x^2(1-x)^2.$$

(E. FAUQUEMBERGUE.)

L'équation caractéristique

$$x(1-x)r^2-(1-2x)r+1-3x+x^2=0,$$

correspondant à l'équation donnée dans laquelle on remplace le second membre par zéro, est satisfaite par

$$r=1;$$

en conséquence, l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+y(1-3x+x^2)=0$$

admettra l'intégrale particulière $y=e^x$.

Alors, si l'on fait

(1) $$e^x\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=z,$$

l'équation proposée devient

(2) $$\frac{dz}{dx}-\frac{1-2x}{x(1-x)}z=-e^x x(1-x).$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est

$$z=x(1-x)(C-e^x),$$

et, par l'équation (1), l'intégrale générale de l'équation

proposée devient

$$y = Ae^{x} + Bx^{2}e^{-x} - x(1+x) - 1,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Charles Chabanel et Wladimir Habbé, à Odessa.

Question 1417

(voir 3e série, t. I, p. 334);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Le nombre p étant supposé premier, et les deux groupes,

$$r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$$

et

$$s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$$

formant deux systèmes complets de résidus premiers par rapport au module p, il y a nécessairement deux indices différents i et k, tels que les produits $r_i s_i$ et $r_k s_k$ sont congrus par rapport au module p.

(A. HURWITZ.)

Chacun des groupes

$$r_1, r_2, \ldots r_{p-1},$$
$$s_1, s_2, \ldots s_{p-1}$$

est identique, à l'ordre près, au groupe

$$(1) \qquad 1.2.3\ldots p-1,$$

qui contient les $p-1$ entiers premiers et inférieurs à p. Il s'ensuit que les trois produits

$$P = 1.2.3\ldots(p-1),$$
$$P' = r_1 r_2 \ldots r_{p-1},$$
$$P'' = s_1 s_2 \ldots s_{p-1}$$

sont égaux.

Soit t_i le résidu de $r_i s_i$ par rapport au module p, tout produit rs étant premier à p, chacun des $p-1$ résidus

(2) $$t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$$

est égal à un entier du groupe (1). Nous avons maintenant à comparer ces résidus entre eux.

A cet effet, supposons que les entiers (2) soient distincts les uns des autres; le groupe qu'ils formeront sera alors identique, à l'ordre près, à celui (1), et leur produit sera égal à P. Or les produits

$$t_1 t_2 \ldots t_{p-1}$$

et

$$r_1 s_1 \times r_2 s_2 \times \ldots \times r_{p-1} s_{p-1}$$

sont congrus par rapport au module p, car tout facteur $r_i s_i$ du second produit est congru au facteur correspondant t_i du premier produit. L'hypothèse que nous avons faite a donc pour conséquence

$$P \equiv r_1 s_1 \times r_2 s_2 \times \ldots \times r_{p-1} s_{p-1} \pmod p,$$

ou

$$P \equiv r_1 r_2 \ldots r_{p-1} \times s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \pmod p,$$

ce qui donne

$$P \equiv P' P'' \pmod p,$$

ou bien, à cause de $P = P' = P''$,

$$P^2 \equiv P \pmod p.$$

Mais le produit P est évidemment premier au module; cette congruence ne peut donc subsister sans que l'on ait

$$P \equiv +1 \pmod p,$$

congruence impossible quand $p > 2$, car

$$1.2.3\ldots(p-1)+1 \quad \text{ou} \quad P+1$$

est divisible par le nombre premier p (théorème de Wilson), c'est-à-dire que

$$P \equiv -1 \pmod p.$$

Cette impossibilité prouve que les résidus (2) ne

peuvent pas être tous distincts les uns des autres : en conséquence, il y a nécessairement deux résidus qui sont égaux entre eux. Soient t_i et t_k ces résidus, on aura

$$r_i s_i \equiv r_k s_k \pmod{p}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1429

(voir 3e série, t. I, p. 528);

PAR M. L. B., à Angers.

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8\,\frac{9}{8}\,\frac{24}{25}\,\frac{49}{48}\,\frac{80}{81}\,\frac{121}{120}\cdots \qquad \text{(Catalan.)}$$

On a (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 247)

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \frac{1.2.3\ldots\mu}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu)},$$

où μ est un nombre entier qui augmente indéfiniment. On tire de là facilement

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 4^{\mu+1}\frac{1.2.3\ldots\mu^{\frac{5}{4}}}{1.5.9.13\ldots(4\mu+1)};$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 4^{\mu+1}\frac{1.2.3\ldots\mu^{\frac{7}{4}}}{3.7.11.15\ldots(4\mu+3)};$$

(1) $$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = \frac{3^2.7^2.11^2.15^2\ldots(4\mu+3)^2}{1^2.5^2.9^2.13^2.17^2\ldots(4\mu+1)^2\mu}.$$

Mais évidemment

$$1 = \frac{4.8.12\ldots4(\mu-1)}{8.12.16\ldots(4\mu)}\times\mu,$$

ou

(2) $$1 = \frac{(5-1)(9-1)\ldots(4\mu-3-1)}{(7+1)(11+1)\ldots(4\mu-1+1)}\times\mu,$$

quel que soit le nombre entier μ.

En multipliant le second membre de l'équation (2) par $\frac{5+1}{7-1} \cdot \frac{9+1}{11-1} \cdots$, facteur évidemment égal à l'unité, on a

$$(3) \quad 1 = \frac{(5^2-1)(9^2-1)\ldots[(4\mu-3)^2-1]}{(7^2-1)(11^2-1)\ldots[(4\mu-1)^2-1]} \times \mu.$$

Si, enfin, je multiplie les équations (1) et (3) membre à membre, j'obtiendrai, en disposant convenablement les facteurs,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = \frac{3^2}{1^2} \frac{5^2-1}{5^2} \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{9^2-1}{9^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdots$$

ou bien, en multipliant par $\frac{8}{8}$ pour la symétrie,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8 \frac{9}{8} \frac{24}{25} \frac{49}{48} \frac{80}{81} \frac{121}{120} \cdots$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Cesaro.

Question 1459

(voir 2e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Le cube d'un nombre entier autre que l'unité ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Soit

$$(1) \qquad y^3 = x^2 + (x+1)^2,$$

où x et y représentent des nombres entiers.

De l'équation (1) on déduit successivement

$$y^3 = 2x^2 + 2x + 1,$$
$$8y^3 = 16x^2 + 16x + 8 = (4x+2)^2 + 4,$$

et en posant

$$2y = Y \quad \text{et} \quad 4x + 2 = X,$$

il vient

$$Y^3 = X^2 + 4.$$

Mais il est démontré dans la *Théorie des nombres* de Legendre (3[e] édition, 1830, t. II, p. 12) qu'une équation telle que

$$Y^3 = X^2 + 4$$

n'admet que les deux solutions entières

$$Y = 2, \quad X = 2 \quad \text{et} \quad Y = 5, \quad X = 11.$$

Par suite, les relations $2y = Y$, $4x + 2 = X$ deviennent

$$2y = 2, \quad 4x + 2 = 2,$$

ou

$$2y = 5, \quad 4x + 2 = 11.$$

Le premier système donne

$$y = 1, \quad x = 0;$$

et le second, les valeurs fractionnaires

$$y = \frac{5}{2}, \quad x = \frac{9}{4}.$$

Donc l'équation

$$(1) \qquad y^3 = x^2 + (x+1)^2$$

ne peut être vérifiée, en nombres entiers, que par $y = 1$ et $x = 0$. C. Q. F. D.

QUESTIONS.

1469. a, b étant des nombres entiers, la quantité

$$\frac{\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^{2n-1} + \left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

est la somme de deux carrés, et aussi la somme de trois carrés ($n \geqq 2$). (E. Catalan.)

1470. 1° a étant un nombre entier positif, il y a, entre les carrés des entiers consécutifs a et $a+1$, au moins un triangulaire et deux au plus.

2° Le nombre des carrés d'entiers compris entre deux triangulaires consécutifs est nul ou égal à l'unité.

3° a étant un entier positif, si le nombre des triangulaires compris entre $(a+1)^2$ et $(a+2)^2$ est égal à deux, le nombre des triangulaires compris entre a^2 et $(a+1)^2$, ainsi que celui des triangulaires compris entre $(a+1)^2$ et $(a+2)^2$, égalera l'unité.

Voici un premier exemple de la vérification de ces énoncés :

$$1^2,\ 3,\ 2^2,\ 6,\ 3^2,\ 10,\ 15,\ 4^2,\ 21,\ 5^2,\ 28,\ 6^2.$$

(LIONNET.)

1471. On donne, dans un hexagone circonscriptible à un cercle, les longueurs des trois diagonales qui unissent les sommets opposés : construire cet hexagone, sachant que ces trois diagonales sont respectivement parallèles à trois côtés de l'hexagone, deux quelconques de ces côtés n'étant pas consécutifs. (E. LEMOINE.)

1472. Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, et i le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ; prouver :

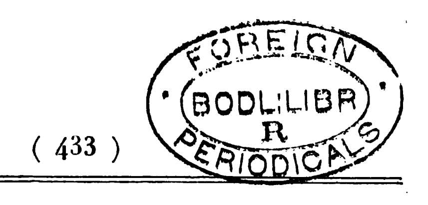
1° Que la distance de O à l'un quelconque des côtés est la moitié de la distance de i au sommet opposé à ce côté ; et de là:

2° Que Oi est la résultante des trois forces égales OA, OB, OC. (SYLVESTER, F. R. S.)

(Extrait du journal anglais *The educational Times;* août 1883).

RECTIFICATION.

Question 1405, *au lieu de* $x = \frac{\alpha y+\beta}{\sqrt{y}+\delta}$, *lisez* $x = \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$.



NOTE SUR LES PERMUTATIONS DE n OBJETS ET SUR LEUR CLASSEMENT;

PAR M. J. BOURGET.

1. On peut classer de diverses manières les permutations en nombre P_n de n objets numérotés

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n.$$

J'ai fait connaître en 1871, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* un premier mode de classification : c'est celui qui résulte du procédé classique employé pour les former et en compter le nombre. J'en ai indiqué un autre plus commode dans le journal de *Mathématiques élémentaires* (année 1881). Ces deux modes de classification permettent tous deux de résoudre facilement les deux problèmes suivants :

1° *Trouver directement et isolément une permutation de rang donné;*

2° *Trouver le rang occupé par une permutation donnée dans la classification adoptée.*

Mais aucune des deux ne permet de trouver la *formule* du rang occupé par un élément déterminé dans la permutation de rang donné ρ.

Je propose dans cette Note un nouveau mode de classification des permutations, différent des deux précédents, qui conduit facilement à la solution de ce problème difficile. Ce nouveau mode de classification consiste essentiellement dans le partage des permutations en groupes de permutations circulaires.

2. Considérons, par exemple, une permutation de six

objets

2 4 6 1 3 5.

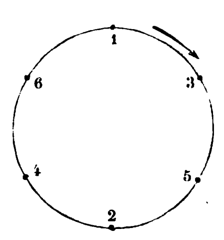
Plaçons le dernier objet au commencement, nous aurons

5 2 4 6 1 3,

puis opérons de même sur ce résultat, nous obtiendrons le tableau des permutations suivantes :

2	4	6	1	3	5
5	2	4	6	1	3
3	5	2	4	6	1
1	3	5	2	4	6
6	1	3	5	2	4
4	6	1	3	5	2
2	4	6	1	3	5.

On voit qu'après la sixième permutation on retombe sur la première et tout recommence dans le même ordre. Ces diverses permutations sont dites *circulaires*, parce que, si les objets sont placés sur une circonférence dans



le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, on obtient les divers résultats du Tableau précédent en lisant, dans le sens indiqué, les nombres placés sur la circonférence et en changeant chaque fois d'origine, par une rétrogradation d'un rang par rapport à l'origine de la lecture précédente.

3. Théorème I. — *Toute permutation de n éléments fait partie d'un groupe de permutations circulaires et la première permutation du groupe peut être celle qui commence par* 1.

Ce théorème est évident, d'après ce que nous venons de dire.

4. Théorème II. — *Chaque groupe de permutations circulaires de n éléments contient n permutations.*

En effet, si l'on suppose les objets écrits sur un cercle, chacun des n objets sera pris successivement comme origine.

5. Théorème III. — *Dans le nombre* P_n *des permutations de n objets, il y a autant de groupes de n permutations circulaires qu'il y a de permutations de n —* 1 *objets.*

En effet, considérons l'un quelconque des types de permutations circulaires de n objets (permutation dont le premier objet est 1), dans lesquels se décompose le nombre total des permutations de n objets. L'ensemble des éléments qui suivent (1) constitue l'une des permutations de $n-1$ objets et il y aura autant de *types* de permutations de n objets qu'il y a de permutations différentes des $(n-1)$ objets $(2, 3, 4, \ldots, n-1, n)$, c'est-à-dire P_{n-1}. D'ailleurs, chaque permutation type donne n permutations différentes et circulaires : donc

$$P_n = nP_{n-1}.$$

On tire de là facilement

$$P_n = 1.2.3\ldots n.$$

Nous supposerons, pour faire image, que chacun des types de permutations de n objets soit écrit sur la circon-

férence d'un cercle. Nous aurons donc P_{n-1} cercles différents donnant les groupes de permutations circulaires dans lesquels on peut décomposer les permutations de n éléments. Nous les nommerons *cercles* (1).

6. *Corollaire.* — On classera les permutations des $(n-1)$ éléments $(2, 3, 4, \ldots, n)$ comme on a classé les permutations de n éléments en groupes de permutations circulaires. Chaque groupe est donné par un *cercle* (2); il y a P_{n-2} cercles (2).

Les P_{n-2} permutations des $n-2$ objets $(3, 4, \ldots, n)$ seront classées de la même manière en groupes de permutations circulaires donnés chacun par un *cercle* (3); il y aura P_{n-3} cercles (3), etc.

On arrivera ainsi à classer les permutations des trois objets $(n-2, n-1, n)$ en groupes de permutations circulaires, donnés chacun par un *cercle* $(n-2)$; il y aura deux cercles $(n-2)$.

Enfin, il n'y a qu'un *cercle* $(n-1)$; car $P_1 = 1$. Il donnera les permutations des deux objets $(n-1, n)$.

7. Problème I. — *Former par ordre toutes les permutations de n objets.*

La classification précédente conduit à une solution très simple de ce problème.

1° Le cercle $(n-1)$ donne les permutations des deux objets $(n-1)$, n.

2° Pour former les P_2 cercles $n-2$, nous plaçons successivement sur des cercles, à la suite de l'objet $n-2$, les permutations données par le cercle précédent.

3° Pour former les P_3 cercles $n-3$, nous placerons successivement sur des cercles, à la suite de l'objet $n-3$, les permutations données par les cercles $(n-2)$ précédents, etc.

Il n'est pas besoin d'ailleurs de se servir de cercles; nous n'employons cette expression que pour faire image.

Les cercles (1) étant formés, nous aurons toutes les permutations classées par groupes de permutations circulaires.

8. Exemple. — *Former toutes les permutations de quatre éléments.*

1° Le cercle (3) nous donne les deux permutations

3 4 4 3.

2° Les deux cercles (2) sont donc (2 3 4), (2 4 3). Ils nous donnent les six permutations

2 3 4	2 4 3
4 2 3	3 2 4
3 4 2	4 3 2

3° Les cercles (1) sont donc

1 2 3 4	1 2 4 3
1 4 2 3	1 3 2 4
1 3 4 2	1 4 3 2.

Ils nous donnent les permutations des quatre éléments rangés par ordre et par groupes de permutations circulaires

1 2 3 4	1 4 2 3	1 3 4 2	1 2 4 3	1 3 2 4	1 4 3 2
4 1 2 3	3 1 4 2	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 3 2	2 1 4 3
3 4 1 2	2 3 1 4	4 2 1 3	4 3 1 2	2 4 1 3	3 2 1 4
2 3 4 1	4 2 3 1	3 4 2 1	2 4 3 1	3 2 4 1	4 3 2 1.

9. Problème II. — *Trouver une permutation de rang donné ρ dans ce mode de classification.*

Chaque cercle (1) donne n permutations; si donc nous

divisons ρ par n, ce qui donnera

$$\rho = nQ_n + R_n,$$

nous en conclurons que la $\rho^{\text{ième}}$ permutation est donnée par le cercle (1) de rang $Q_n + 1$, et qu'elle est la R_n^e de ce cercle.

Mais, pour que cette conclusion soit générale, il faut faire la division de manière que R_n ne soit jamais nul. R_n peut donc prendre l'une quelconque des valeurs $(1, 2, 3, \ldots n)$, mais il ne peut pas être zéro. Q_n peut être nul. En effet, supposons que ρ contienne n exactement, nous poserons

$$\rho = nQ_n + n.$$

La permutation de rang ρ se trouvera bien dans le cercle (1) de rang $Q_n + 1$ et elle sera bien la $n^{\text{ième}}$ de ce cercle. La règle donnée précédemment est conservée; elle ne le serait pas, si nous avions fait la division avec le reste zéro.

Nous voilà ramenés à trouver le cercle (1) de rang $Q_n + 1$. Mais ce rang n'est pas autre chose que celui de la permutation des $n - 1$ éléments $(2, 3, \ldots n)$ qu'il faut placer à la suite de (1) pour former le cercle (1) en question. Nous opérerons donc sur $Q_n + 1$ comme nous avons opéré sur ρ, et nous poserons

$$Q_n + 1 = (n - 1)Q_{n-1} + R_{n-1},$$

R_{n-1} étant l'un des nombres $(1, 2, \ldots n - 1)$.

Cette égalité nous montre que la permutation de rang $Q_n + 1$ des $n - 1$ éléments $(2, 3, \ldots, n)$ est donnée par le cercle (2) de rang $Q_{n-1} + 1$ et qu'elle est la R_{n-1}^e de ce cercle.

Nous sommes ainsi ramenés à trouver le cercle (2) de rang $Q_{n-1} + 1$. Or ce rang est celui de la permutation des $n - 2$ éléments $(3, 4, \ldots n)$ qu'il faut placer à la suite

de (2) pour former le cercle (2) en question. Nous opérerons donc sur $Q_{n-1}+1$ comme sur ρ et nous poserons

$$Q_{n-1}+1=(n-2)Q_{n-2}+R_{n-2}.$$

En raisonnant toujours de la même manière, nous aurons les égalités successives

$$Q_{n-2}+1=(n-3)Q_{n-3}+R_{n-3},$$
$$Q_{n-3}+1=(n-4)Q_{n-4}+R_{n-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_3+1=2Q_2+R_2,$$

R_2 n'étant pas nul, mais égal à l'un des nombres 1, 2.

Cette dernière égalité nous apprend que la permutation à prendre des deux éléments $(n-1, n)$ de rang Q_3+1 est donnée par le cercle $(n-1)$ de rang Q_2+1, et qu'elle est la R_2^e de ce cercle. Comme il n'y a qu'un cercle $n-1$, il faut que $Q_2+1=1$: donc $Q_2=0$.

Nous poserons enfin, pour la symétrie,

$$Q_2+1=1.Q_1+R_1,$$

et l'on aura $R_1=1$. D'ailleurs, Q_2 étant nul, Q_1 est nul aussi.

Après ce travail préparatoire, on a la permutation des deux éléments $(n-1, n)$ qu'il faut connaître pour former le cercle $(n-2)$ dont on a besoin. Après avoir formé ce cercle, R_3 fait connaître la permutation circulaire qu'il faut prendre pour former le cercle $(n-3)$. Après avoir formé ce cercle, le reste R_4 nous apprend la permutation circulaire à prendre pour former le cercle suivant $(n-4)$, etc.

Enfin nous formons le cercle (1), et le reste R_n nous apprend quelle est la permutation cherchée dans ce cercle.

10. Exemple. — *Trouver la cinq cent cinquante-cinquième permutation des six éléments* (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Nous obtenons dans ce cas

Cercle (1)	$555 = 6.92 + 3$,
» (2)	$93 = 5.18 + 3$,
» (3)	$19 = 4.4 + 3$,
» (4)	$5 = 3.1 + 2$,
» (5)	$2 = 2.0 + 2$,
	$1 = 1.0 + 1$.

1° Dans le cercle (5), qui est (56), je prends la deuxième permutation 65;

2° Le cercle (4) sera (465); je prends la deuxième permutation (546);

3° Le cercle (3) sera $\frac{(3546)}{1}$; je prends la troisième permutation $\frac{(4635)}{2}$;

4° Le cercle (2) sera (24635); je prends la troisième permutation (35246);

5° Le cercle (1) sera (135246); je prends la troisième permutation

4 6 1 3 5 2

et j'ai la cinq cent cinquante-cinquième permutation demandée.

11. Problème III. — *Trouver la formule du rang de chaque élément dans la permutation de rang* ρ.

Ce problème paraît inextricable avec les deux autres modes de classification que j'ai donnés; on peut le résoudre facilement comme il suit dans le nouveau mode.

1° Le dernier reste $R_1 = 1$ indique (ce qui est évident) que l'élément n occupe le rang 1 dans la permutation unique qu'il forme;

2° Nous formons le cercle $(n - 1)$ en plaçant cet élé-

ment n à la suite de $n-1$: nous obtenons $(n-1)n$. On voit que

L'élément $n-1$ a pris le rang	....	1
» n »	....	R_1+1.

Puis nous prenons la R_2^e permutation circulaire; le rang de chaque élément augmente de R_2-1 unités; donc

L'élément $n-1$ prendra le rang	....	R_2
» n »	....	R_1+R_2.

Mais le dernier élément n de la permutation type $(n-1)n$ ne peut pas augmenter de rang; en d'autres termes, cette augmentation revient à son passage au premier rang. Si donc on trouve R_1+R_2 supérieur à 2, on devra ôter 2 et le reste indiquera sa place au premier rang.

3° Plaçons la permutation formée des deux éléments $(n-1, n)$ à la suite de $(n-2)$; nous formerons le cercle $n-2$, et dans ce cercle

$n-2$ occupera le rang	....	1
$n-1$ »	....	R_2+1
n »	....	R_1+R_2+1.

Prenons maintenant la R_3^e permutation que donne ce cercle; le rang de chaque élément augmentera de R_3-1 et après cela

$n-2$ aura le rang	....	R_3
$n-1$ »	....	R_2+R_3
n »	....	$R_1+R_2+R_3$.

Mais aucun de ces éléments ne peut avoir un rang supérieur à 3. Or, R_3 étant au plus 3, il n'y a aucune correction à faire à la première formule. R_2+R_3 ne peut pas surpasser 5, mais il peut surpasser 3 : on retranchera 3 si cela a lieu. R_1+R_2 doit être diminué de 2,

s'il y a lieu; $R_1 + R_2 + R_3$ ne peut pas surpasser 5, mais peut surpasser 3 : on le diminuera de 3, s'il y a lieu. En général, dans le calcul de la somme des restes, on diminue, s'il y a lieu, chaque fois une somme trouvée de l'indice du dernier reste employé.

4° Plaçons la permutation formée des trois éléments $(n-2, n-1, n)$ à la suite de $(n-3)$; nous formerons le cercle $(n-3)$, et dans ce cercle

$n-3$ occupera le rang	....	1
$n-2$ »	....	R_3+1
$n-1$ »	....	R_2+R_3+1
n »	....	$R_1+R_2+R_3+1.$

Nous prenons dans ce cercle la R_4^e permutation circulaire. Le rang de chaque élément augmente de R_4-1, sans pouvoir surpasser 4; dans cette permutation nouvelle

$n-3$ occupera le rang	....	R_4
$n-2$ »	....	R_3+R_4
$n-1$ »	....	$R_2+R_3+R_4$
n »	....	$R_1+R_2+R_3+R_4.$

On calculera ces sommes avec les précautions que j'ai indiquées précédemment.

La loi est évidente; nous trouverons donc que, dans la permutation de rang ρ,

1 occupera le rang	..	R_n
2 »	..	$R_{n-1}+R_n$
3 »	..	$R_{n-2}+R_{n-1}+R_n$
4 »	..	$R_{n-3}+R_{n-2}+R_{n-1}+R_n$
....		....
n »	..	$R_1+R_2+\ldots+R_{n-3}+R_{n-2}+R_{n-1}+R_n$

Nous n'oublierons pas que dans le calcul de ces diverses sommes les restes doivent être pris dans l'ordre des indices croissants et que, arrivé à un reste, si la somme ob-

tenue surpasse l'indice, on la diminue de cet indice avant de continuer.

12. Exemple. — *Trouver le rang de chacun des six éléments dans la cinq cent cinquante-cinquième permutation de six éléments.*

Dans ce cas

$$R_6 = 3, \quad R_5 = 3, \quad R_4 = 3, \quad R_3 = 2, \quad R_2 = 2, \quad R_1 = 1.$$

Formons le tableau suivant :

1 occupera le rang		....	3
2	»	....	$3+3$
3	»	....	$3+3+3$
4	»	....	$2+3+3+3$
5	»	....	$2+2+3+3+3$
6	»	....	$1+2+2+3+3+3.$

Puis, en exécutant les calculs avec les précautions indiquées ci-dessus, nous trouverons que

1 occupera le rang		....	3
2	»	....	6
3	»	....	4
4	»	....	1
5	»	....	5
6	»	....	2.

Donc la cinq cent cinquante-cinquième permutation demandée est

4 6 1 3 5 2. c. q. f. t.

13. Problème IV. — *Étant donnée une permutation, trouver son rang dans la classification adoptée.*

Désignons par

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_n,$$

les rangs donnés occupés par les éléments

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n.$$

Nous résoudrons les équations

$$\begin{aligned} R_n &= A_1, \\ R_{n-1} + R_n &= A_2, \\ R_{n-2} + R_{n-1} + R_n &= A_3, \\ R_{n-3} + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n &= A_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_{n-3} + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n &= A_n. \end{aligned}$$

Nous en déduirons les divers restes R_1, R_2, ..., R_n. Dans cette résolution, il faudra remarquer que chaque reste est positif, différent de zéro et au plus égal à son indice. Les soustractions successives auquelles on sera conduit devront s'effectuer toutes : on ajoutera donc l'indice si cela est nécessaire, et cela sera nécessaire si le résultat trouvé est négatif. On n'oubliera pas, pour se guider dans les calculs, qu'on fait ici l'opération inverse de celle qui a été indiquée dans le problème précédent.

Les restes successifs R_n, R_{n-1}, ..., R_2, R_1 étant trouvés, on pourra en déduire les quotients successifs et par suite ρ, au moyen des équations

$$\begin{aligned} \rho &= n Q_n + R_n, \\ Q_n &= (n-1) Q_{n-1} + R_{n-1} - 1, \\ Q_{n-1} &= (n-2) Q_{n-2} + R_{n-2} - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_3 &= 2 Q_2 + R_2 - 1, \\ Q_2 &= 1 Q_1 + R_1 - 1. \end{aligned}$$

De ces formules, on peut d'ailleurs, si l'on veut, tirer ρ en fonction des restes. On obtient

$$\begin{aligned} \rho = R_n &+ n(R_{n-1} - 1) \\ &+ n(n-1)(R_{n-2} - 1) + n(n-1)(n-2)(R_{n-3} - 1) + \ldots \\ &+ n(n-1)(n-2)\ldots 3(R_2 - 1). \end{aligned}$$

14. Exemple. — *Trouver le rang de la permutation de six éléments* 4, 6, 1, 3, 5, 2.

Nous avons à résoudre les équations

$$R_6 = 3,$$
$$R_5 + R_6 = 6,$$
$$R_4 + R_5 + R_6 = 4,$$
$$R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 1,$$
$$R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 5,$$
$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 2.$$

Nous en concluons

$$R_6 = 3,$$
$$R_5 = 3,$$
$$R_4 = 3,$$
$$R_3 = 2,$$
$$R_2 = 2,$$
$$R_1 = 1,$$

d'où

$$\rho = 3 + 6.2 + 6.5.2 + 6.5.4.1 + 6.5.4.3.1 = 555.$$

C. Q. F. T.

15. Théorème IV. — *Deux systèmes de restes conjugués donnent deux permutations conjuguées à égale distance des extrêmes.*

Le reste R_p est l'un des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-2, p-1, p$. Deux de ces nombres à égale distance des nombres extrêmes $1, p$ se nomment *conjugués*. Donc, si R'_p représente le reste conjugué de R_p, on aura

$$R_p + R'_p = p + 1.$$

Soit un système de restes

$$R_n, \quad R_{n-1}, \quad R_{n-2}, \quad \ldots, \quad R_3, \quad R_2;$$

le rang ρ de la permutation correspondante sera

$$\rho = R_n + n(R_{n-1} - 1)$$
$$+ n(n-1)(R_{n-2} - 1) + \ldots + n(n-1)(n-2)\ldots 4.3(R_2 - 1).$$

Prenons les restes conjugués

$$R'_n,\quad R'_{n-1},\quad R'_{n-2},\quad \ldots,\quad R'_3,\quad R'_2;$$

le rang ρ' de la permutation correspondante sera

$$\rho' = R'_n + n(R'_{n-1} - 1) + n(n-1)(R'_{n-2} - 1) + \ldots$$
$$+ n(n-1)(n-2)\ldots 4.3(R'_2 - 1),$$

ou bien

$$\rho' = 1 + n - R_n + n[n - R_{n-1} - 1] + n(n-1)[n - 1 - R_{n-2} - 1] + \ldots$$
$$+ n(n-1)(n-2)\ldots 4.3[3 - R_2 - 1]$$
$$= 1 + n + n(n - 1 - 1) + n(n-1)(n - 2 - 1) + \ldots$$
$$+ n(n-1)(n-2)\ldots 4.3(2-1)$$
$$- [R_n + n(R_{n-1} - 1) + n(n-1)(R_{n-2} - 1) + \ldots$$
$$+ n(n-1)(n-2)\ldots 4.3(R_2 - 1)].$$

Mais on a l'identité

$$n + n(\overline{n-1} - 1) + n(n-1)(\overline{n-2} - 1)$$
$$+ n(n-1)(n-2)(\overline{n-3} - 1) + \ldots$$
$$+ n(n-1)\ldots 4.3(2-1) = 1.2.3\ldots n,$$

donc

$$\rho' = 1 + 1.2.3\ldots n - \rho$$

ou bien

$$\rho + \rho' = 1 + 1.2.3\ldots n,$$

ce qui prouve que les deux permutations obtenues par deux systèmes de restes conjugués sont à égale distance des extrêmes dans notre classification.

16. Théorème V. — *Deux permutations conjuguées à égale distance des extrêmes ont leurs éléments disposés en ordre inverse, ou, ce qui est la même chose, ont leurs éléments de même rang conjugués.*

En effet, la formule de l'élément quelconque $n + 1 - p$ dans la permutation conjuguée d'une première est donnée par la somme

$$R'_p + R'_{p+1} + R'_{p+2} + R'_{p+3} + \ldots + R'_n,$$

calculée avec les précautions indiquées au n° 13. Remplaçons R'_p, R'_{p+1}, ... par leurs valeurs, nous aurons la formule.

$$(p+1-R_p)+(p+2-R_{p+1})+(p+3-R_{p+2}) \\ +(p+4-R_{p+3})+\ldots+(n+1-R_n).$$

Pour calculer cette expression, nous ajoutons les deux premières parenthèses. Si leur somme est inférieure à $p+1$, c'est que la somme R_p+R_{p+1} est supérieure à $p+1$; dans ce cas, on peut mettre la somme de ces deux parenthèses sous la forme

$$p+2-[R_p+R_{p+1}-(p+1)]$$

ou bien

$$p+2-(\overline{R_p+R_{p+1}}),$$

le trait horizontal indiquant que cette somme est faite conformément aux règles suivies dans le n° 13. Si la somme des deux parenthèses est supérieure à $p+1$, il faut lui retrancher $p+1$, et dans ce cas elle se réduit à

$$p+2-(\overline{R_p+R_{p+1}}),$$

car R_p+R_{p+1} sera au plus égal à $p+1$.

Ajoutons maintenant la troisième parenthèse. Si la somme est inférieure à $p+2$, c'est que $\overline{R_p+R_{p+1}}+R_{p+2}$ est supérieure à $p+2$: donc

$$\overline{R_p+R_{p+1}+R_{p+2}}=\overline{R_p+R_{p+1}}+R_{p+2}-(p+2).$$

D'ailleurs on a

$$p+2-(\overline{R_p+R_{p+1}})+(p+3-R_{p+2}) \\ =p+3-[\overline{R_p+R_{p+1}}+R_{p+2}-(p+2)] :$$

donc

$$(p+1-R_p)+(p+2-R_{p+1})+(p+3-R_{p+2}) \\ =p+3-[\overline{R_p+R_{p+1}+R_{p+2}}].$$

Si, en ajoutant la troisième parenthèse, nous obtenons une somme supérieure à $p+2$, il faut retrancher $p+2$

et il nous reste finalement encore

$$p + 3 - [\overline{R_p + R_{p+1} + R_{p+2}}].$$

En continuant à raisonner de la même manière, nous arrivons enfin, pour la formule du rang de l'élément $n + 1 - p$, à

$$n + 1 - [\overline{R_p + R_{p+1} + \ldots + R_n}].$$

Donc l'élément $n + 1 - p$, qui occupait dans la première permutation le rang

$$\overline{R_p + R_{p+1} + \ldots + R_n},$$

occupera le rang

$$n + 1 - [\overline{R_p + R_{p+1} + \ldots + R_n}].$$

Ces deux places sont également éloignées des places extrêmes.

Il résulte de là que la permutation conjuguée n'est pas autre chose que la première lue en ordre inverse de droite à gauche.

On peut vérifier ce résultat sur l'ensemble des permutations de quatre objets que nous avons formées. Le théorème que nous venons de démontrer réduit à moitié le nombre des opérations à faire pour former toutes les permutations de n éléments.

17. La solution du problème 14 nous montre que le calcul des diverses permutations dépend uniquement de la connaissance des restes

$$R_n, \quad R_{n-1}, \quad R_{n-2}, \quad \ldots, \quad R_3, \quad R_2.$$

Or, nous savons que

R_n est l'un des nombres		$1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2\ n-1\ n$
R_{n-1}	»	$1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2\ n-1$
R_{n-2}	»	$1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2$
....		
R_3	»	$1\ 2\ 3$
R_2	»	$1\ 2.$

Si donc nous faisons par ordre toutes les combinaisons possibles de ces divers éléments, nous aurons toutes les permutations des n éléments, au moyen des formules du n° 14. Mais ce procédé serait moins rapide que celui que nous avons indiqué au n° 7.

On peut se demander comment il faut associer les restes pour obtenir les diverses permutations dans l'ordre de notre classification. Voici le théorème qui fait connaître cet ordre.

18. Théorème VI. — *Le tableau des restes étant formé*

R_n .... $1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2\ n-1\ n$
R_{n-1} .... $1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2\ n-1$
R_{n-2} .... $1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2$
....
R_4.............. $1\ 2\ 3\ 4$
R_3.............. $1\ 2\ 3$
R_2.............. $1\ 2$
R_1.............. 1,

on prend d'abord les deux dernières lignes, et l'on forme les associations successives (1, 1), (2, 1). *Passant à la ligne précédente, on forme les associations*

(111), (211), (311), (121), (221), (321).

Passant à la ligne suivante, on forme les associations

(1 1 1 1) (1 2 1 1) (1 3 1 1) (1 1 2 1) (1 2 2 1) (1 3 2 1)
(2 1 1 1) (2 2 1 1) (2 3 1 1) (2 1 2 1) (2 2 2 1) (2 3 2 1)
(3 1 1 1) (3 2 1 1) (3 3 1 1) (3 1 2 1) (3 2 2 1) (3 3 2 1)
(4 1 1 1) (4 2 1 1) (4 3 1 1) (4 1 2 1) (4 2 2 1) (4 3 2 1).

Passant à la ligne suivante, on associe chacun des nombres de cette ligne successivement avec chacun des résultats précédents, et ainsi de suite.

Les associations finales donneront les groupements des restes classés de façon à fournir les permutations successives de notre classification.

En effet, si ce théorème est vrai pour p objets, il est vrai pour $p+1$; car les nouveaux restes $1, 2, 3, \ldots, p+1$ indiquent d'après nos formules le rang du $(p+1)^{\text{ième}}$ objet. Il faut donc que ces $p+1$ restes soient groupés successivement avec chacun des groupements obtenus pour p objets. Or le théorème est vrai évidemment pour deux objets; donc il est général.

SUR UN ÉLÉMENT DU TRIANGLE RECTILIGNE; SYMÉDIANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. J'ai publié, en 1880, une *Note sur une ligne considérée dans le triangle rectiligne* [1], où j'étudiais les propriétés d'un élément dont on ne s'était pas encore occupé, à ma connaissance, et qui présente cependant de l'intérêt tant par la simplicité de ses propriétés que par les nombreuses applications qui en résultent. Ayant eu, depuis, l'occasion de m'en servir dans diverses questions intéressantes, je demanderai la permission de revenir sur cette petite théorie de Géométrie élémentaire, en la modifiant sur certains points et la complétant par de nouvelles et nombreuses remarques. Je commencerai par donner des démonstrations absolument géométriques des théorèmes bien simples qui en sont la base; je les ferai suivre de quelques applications importantes.

---

[1] *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. IV, p. 539.

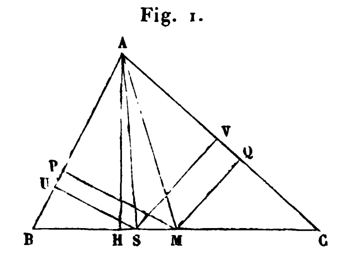
2. *Définition.* — L'élément qui nous occupe est la droite symétrique de la médiane d'un triangle par rapport à la bissectrice issue du même sommet; pour abréger le langage, nous demanderons la permission de donner à cette droite, dans la suite de cette Note, le nom de *symédiane,* qui rappelle sa définition.

3. Théorème I. — *Si l'on porte sur le côté* AB *la longueur* AC′ *égale à* AC, *et sur le côté* AC *la longueur* AB′ *égale à* AB, *la symédiane issue du sommet* A *passe par le milieu de* B′C′.

Cela résulte sans démonstration de la définition qui vient d'être donnée; on en conclut un moyen commode de construire la symédiane.

4. Théorème II. — *Les distances d'un point de la symédiane aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés* (*fig.* 1).

Fig. 1.



Prenons, par exemple, le point S où la symédiane AS rencontre le côté opposé. Soit AM la médiane. Abaissons les perpendiculaires MP et SU sur le côté AB, MQ et SV sur le côté AC.

Les droites AS et AM étant, par définition, symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a

$$\widehat{BAS} = \widehat{CAM}, \quad \widehat{BAM} = \widehat{CAS}.$$

Dès lors, les triangles ASU et AMQ sont semblables, ainsi que les triangles AMP et ASV, ce qui donne

$$\frac{SU}{AS} = \frac{MQ}{AM}, \quad \frac{SV}{AS} = \frac{MP}{AM},$$

et, par division,

$$\frac{SU}{SV} = \frac{MQ}{MP}.$$

Si nous considérons la hauteur AH, nous avons

$$\frac{MQ}{MC} = \frac{AH}{AC}, \quad \frac{MP}{MB} = \frac{AH}{AB}$$

et, par division, en remarquant que MB = MC,

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{AB}{AC};$$

donc

$$\frac{SU}{SV} = \frac{AB}{AC}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. Corollaire. — *Les trois symédianes d'un triangle concourent en un même point dont les distances aux trois côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.*

En effet, d, d', d'' étant ces distances, nous avons, d'après le théorème précédent, pour le point de rencontre des symédianes issues des sommets A et B,

$$\frac{d'}{b} = \frac{d''}{c} \quad \text{et} \quad \frac{d}{a} = \frac{d''}{c};$$

par suite,

$$\frac{d'}{b} = \frac{d}{a},$$

ce qui prouve que ce point se trouve sur la symédiane issue du sommet C, et l'on a

$$\frac{d}{a} = \frac{d'}{b} = \frac{d''}{c}.$$

6. Théorème III. — *Les segments déterminés par une symédiane sur le côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

On a, en effet (*fig.* 1),

$$\frac{SB}{SU} = \frac{AB}{AH}, \quad \frac{SC}{SV} = \frac{AC}{AH}$$

et, par division,

$$\frac{SB}{SC} = \frac{SU}{SV}\frac{AB}{AC}$$

ou, d'après le théorème II,

$$\frac{SB}{SC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

7. Corollaire I. — *Dans le triangle rectangle, la symédiane issue du sommet de l'angle droit se confond avec la hauteur.*

La propriété précédente appartient, en effet, à la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse.

8. Corollaire II. — *Les antiparallèles de la symédiane issue de l'angle* A *par rapport aux angles* ABC *et* ACB *coupant le côté* BC *aux points* I *et* K, *on a* BI = CK.

Car on voit que

$$BI = \frac{\overline{AB}^2}{BS} \quad \text{et} \quad CK = \frac{\overline{AC}^2}{CS}.$$

On peut remarquer, en outre, que :
L'angle IAK *est supplémentaire de l'angle* BAC.

9. Théorème IV. — *Le point de concours des symé-*

dianes est le barycentre des sommets A, B, C *respectivement affectés des coefficients* a^2, b^2, c^2.

Si l'on joint le point A à ce barycentre, la droite ainsi obtenue coupera BC en un point S, dans le rapport inverse des coefficients; or, B étant affecté du coefficient b^2, C du coefficient c^2, on aura

$$\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

AS est donc bien symédiane, et le théorème est établi.

10. Théorème V. — *La perpendiculaire élevée à la base* BC *par le pied* S *de la symédiane* AS, *rencontrant aux points* B′ *et* C′ *les perpendiculaires élevées à* AB *et à* AC *par les points* B *et* C, *on a*

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB^3}{AC^3}.$$

En effet, AH étant la hauteur, on a

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{BS}{AH}, \quad \frac{CC'}{AC} = \frac{CS}{AH};$$

donc

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{BS}{CS} \cdot \frac{AB}{AC},$$

ou, en vertu du théorème III,

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC}^3}.$$

Applications.

11. Problème. — *Par le point de concours de deux droites, en tirer une autre telle que le rapport des*

distances de chacun de ses points aux deux premières ait une valeur donnée.

On porte sur les deux droites des longueurs qui soient entre elles dans le rapport demandé, et l'on prend la symédiane du triangle ainsi formé (théorème II).

12. Problème. — *Diviser une droite a dans le rapport des carrés de deux droites b et c.*

On forme un triangle avec les trois droites, et l'on prend la symédiane correspondant au côté a (théorème III).

Si l'on ne peut former un triangle avec les trois droites données, on augmente b et c dans un même rapport, de façon à rendre la construction possible. Cette solution est plus simple que la solution classique qui repose sur l'emploi d'un triangle rectangle.

Il est d'ailleurs à remarquer que le triangle (a, b, c) se trouvera souvent tout formé sur la figure.

13. Problème. — *Trouver à l'intérieur d'un triangle un point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle soit un minimum.*

Prenons à l'intérieur d'un triangle ABC un point dont les distances respectives aux côtés a, b, c soient désignées par d, d', d''.

Exprimant que les trois triangles déterminés par ce point ont une somme de surfaces équivalente à la surface S du triangle ABC, nous avons entre les variables d, d', d'' la relation

$$ad + bd' + cd'' = 2S.$$

La fonction à rendre minimum est la somme

$$d^2 + d'^2 + d''^2.$$

Nous pouvons multiplier cette fonction par la quantité constante $a^2+b^2+c^2$ et écrire, d'après l'identité de Lagrange,

$$(a^2+b^2+c^2)(d^2+d'^2+d''^2) = (ad+bd'+cd'')^2+(ad'-bd)^2 + (bd''-cd')^2+(cd-ad'')^2.$$

Le premier terme du second membre est constant; les trois autres sont des carrés variables; le minimum de leur somme a lieu quand ils sont tous trois nuls, ce qui donne

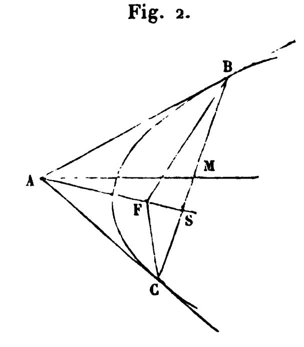
$$\frac{d}{a}=\frac{d'}{b}=\frac{d''}{c}.$$

Cette relation définit, d'après le corollaire du théorème II (n° 5), le point de rencontre de trois symédianes. Donc :

14. Théorème. — *Le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés d'un triangle est minimum est le point de concours des trois symédianes de ce triangle.*

15. Théorèmes sur la parabole. — *La droite qui joint le point de concours de deux tangentes à une*

Fig. 2.



parabole au foyer de cette parabole est symédiane

du triangle formé par les deux tangentes et la corde de contact (fig. 2).

Soient les tangentes AB et AC. Joignons les points A, B et C au foyer F; AF coupe BC au point S. Tirons AM parallèle à l'axe de la parabole. D'après un théorème bien connu, les angles BAM et CAF sont égaux, et, comme AM passe par le milieu M de BC, AS est la symédiane du triangle ABC.

16. Corollaire I. — Appliquant au point F de la symédiane AS le théorème II (n° 4), nous avons ce théorème :

Les distances du foyer F *aux deux tangentes* AB *et* AC *sont proportionnelles aux longueurs de ces tangentes.*

17. Corollaire II. — Appliquons maintenant le théorème III (§ 6); il donne

$$\frac{BS}{CS} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Mais on sait que AF est bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$; donc

$$\frac{BS}{CS} = \frac{BF}{CF}$$

et, par suite,

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Les distances du foyer aux points de contact sont proportionnelles aux carrés des longueurs des tangentes.

18. *Remarque.* — Les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{BAM}$ sont

égaux, ainsi que $\widehat{ACF}$ et $\widehat{CAM}$. On est ainsi conduit à une propriété de la symédiane que je proposerai de rechercher directement (*Exercices,* IV).

19. Théorèmes sur la lemniscate. — *La normale à la lemniscate est symédiane du triangle formé par les rayons vecteurs et l'axe polaire.*

L'équation de la courbe rapportée à ses pôles étant $\rho\rho_1 = K$, les dérivées par rapport à ρ et ρ_1 sont ρ_1 et ρ. D'après cela, on aura la normale en portant ρ sur ρ_1, ρ_1 sur ρ et composant ces longueurs comme des forces, ce qui rentre dans la construction de la symédiane donnée théorème I (§ 3).

20. Sur la ligne des pôles comme diamètre, décrivons une circonférence; aux quatre points de rencontre de la lemniscate et de cette circonférence, d'après le théorème précédent et le corollaire I du théorème III (§ 7), la normale sera perpendiculaire à l'axe polaire; donc :

Les points de la lemniscate où la tangente est parallèle à l'axe polaire sont sur la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre ([1]).

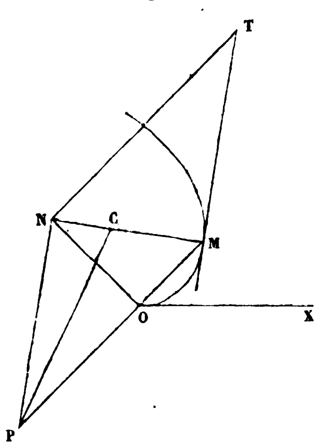
21. *Remarque.* — Si l'on compare le tracé qui vient d'être indiqué, pour la normale à la lemniscate, à la construction de la tangente à cette courbe, qui résulte de la méthode de Roberval, on est conduit à une propriété de la symédiane bien facile à démontrer directement (*Exercices,* I).

([1]) Je crois avoir énoncé ce théorème pour la première fois dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XX, p. 200. M. Barbarin l'a depuis démontré d'une autre façon (3e série, t. I, p. 27).

22. Théorème sur la spirale d'Archimède. — *Par le point de rencontre du rayon vecteur et de la parallèle à la tangente menée par l'extrémité de la sous-normale, tirons la symédiane du triangle formé par ces droites et la normale. La droite ainsi menée passe par le centre de courbure* ([1]) (*fig.* 3).

Soit C le centre de courbure, c'est-à-dire le point où MN touche son enveloppe. La sous-normale ON étant constante, NT parallèle à OM est tangente au cercle décrit par le point N. Dès lors, on a entre les déplacements infiniment petits correspondants des points M et N,

Fig. 3.



$$\frac{d(M)}{d(N)} = \frac{MC.MT}{NC.NT}.$$

D'ailleurs, l'angle MON étant constant, et MN étant

([1]) Ce théorème a été aussi énoncé par nous, mais un peu différemment, et avec une autre démonstration (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 292).

normale à la courbe au point M, NO à celle du point N, on a aussi

$$\frac{d(M)}{d(N)} = \frac{MN}{NO} = \frac{NT}{MT}.$$

Donc

$$\frac{MC.MT}{NC.NT} = \frac{NT}{MT}$$

ou

$$\frac{MC}{NC} = \frac{\overline{NT}^2}{\overline{MT}^2} = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{NP}^2},$$

ce qui, d'après le théorème III (§ 4), démontre que PC est symédiane du triangle MPN.

23. Problème sur les coniques. — *Une droite variable se meut dans le plan d'une conique de façon que les tangentes à la conique aux points d'intersection avec la droite se coupent sous un angle constant. Déterminer le point où cette droite touche son enveloppe.*

Soient A et B les points d'intersection de la droite et de la conique. Les tangentes à la conique en ces points se coupent au point T. La droite AB touche son enveloppe au point E. On a entre les déplacements infiniment petits correspondants des points A et B la relation

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AE.AT}{BE.BT}.$$

D'ailleurs, R et R' étant les rayons de courbure aux points A et B, $d\theta$ et $d\theta'$ les angles de contingence correspondants, on a

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{R\,d\theta}{R'\,d\theta'}.$$

Mais, l'angle ATB étant constant, $d\theta = d\theta'$; par suite,

$$\frac{AE.AT}{BE.BT} = \frac{R}{R'}.$$

Or, d'après un théorème connu,

$$\frac{R}{R'} = \frac{\overline{AT}^3}{\overline{BT}^3};$$

donc

$$\frac{AE.AT}{BE.BT} = \frac{\overline{AT}^3}{\overline{BT}^3}$$

ou

$$\frac{AE}{BE} = \frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2},$$

ce qui, d'après le théorème III, fait voir que *la droite* TE *est symédiane dans le triangle* ATB.

24. Dans le cas où l'angle constant $\widehat{ATB}$ est droit, TE est perpendiculaire sur AB. Donc, en appelant C le cercle tel que de chacun de ses points on voie la conique K sous un angle droit, nous avons ce théorème :

Le point de la polaire réciproque de C *par rapport à* K *correspondant à un point* M, *pris sur* C, *s'obtient en abaissant du point* M *une perpendiculaire sur sa polaire prise par rapport à* K.

25. Problème sur les coniques. — *Étant donné le centre de courbure en un point quelconque d'une conique, en déduire le centre de courbure en tout autre point de cette conique.*

Les tangentes à la conique aux points a et b se coupent au point t; α et β sont les centres de courbure correspondant à ces points; ts étant symédiane du triangle atb, la perpendiculaire élevée à ab par le point s coupe en a' et b' les normales $a\alpha$ et $b\beta$.

D'après un théorème connu, nous avons

$$\frac{a\alpha}{b\beta} = \frac{at^3}{bt^3}$$

ou, en vertu du théorème V (§ 10),

$$\frac{a\alpha}{b\beta} = \frac{aa'}{bb'}.$$

Des points α et β abaissons sur ab les perpendiculaires $\alpha\alpha_1$ et $\beta\beta_1$; nous aurons

$$\frac{a\alpha_1}{b\beta_1} = \frac{as}{bs};$$

par suite, les parallèles $\alpha_1 u$ et $\beta_1 u$ à at et à bt se coupent au point u sur la symédiane st; cela donne le théorème suivant, qui résout la question :

Les parallèles aux tangentes menées par les projections des centres de courbure sur la corde de contact se coupent sur la symédiane du triangle formé par ces tangentes et la corde de contact.

26. Si nous rapprochons la construction donnée au § 23 du théorème énoncé au § 15, nous obtenons le théorème suivant :

K *étant une courbe telle que de chacun de ses points on voie la parabole* P *sous un angle constant,* K' *la polaire réciproque de* K *par rapport à* P, *toute droite qui joint deux points correspondants de* K *et* K' *passe par le foyer de* P.

On voit, par les applications qui précèdent, que la *symédiane* joue un rôle utile dans des questions intéressantes et de genres très divers. C'est ce qui me fait

espérer qu'on voudra bien désormais la prendre en considération, en lui conservant un nom absolument nécessaire quand il s'agit d'énoncer les théorèmes nombreux où elle figure.

Exercices sur la symédiane.

I. On prolonge le côté AB du triangle ABC d'une longueur égale AB'; en B' et en C on élève respectivement à AB et à AC des perpendiculaires qui se coupent en I; AI est perpendiculaire à la symédiane issue du sommet A.

II. Les trois symédianes d'un triangle passent respectivement par les trois sommets du triangle formé par les côtés extérieurs des carrés construits sur les côtés du triangle donné.

III. Du milieu M de BC on abaisse les perpendiculaires MP et MQ sur AB et AC. La droite PQ qui joint les pieds de ces perpendiculaires est perpendiculaire sur la symédiane issue du sommet A.

IV. AM étant médiane du triangle ABC, on prend un point P tel que $\widehat{PBA} = \widehat{MAB}$ et $\widehat{PCA} = \widehat{MAC}$. Le point P est sur la symédiane issue du sommet A.

V. Les trois symédianes d'un triangle passent respectivement par les trois sommets du triangle polaire réciproque de ce triangle par rapport à son cercle circonscrit.

VI. Le point de rencontre des symédianes est le centre de gravité du triangle formé par les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés du triangle donné.

VII. Les points H et K étant les pieds des perpendiculaires abaissées des points B et C sur la bissectrice issue du sommet A, on mène par le point H une parallèle à AB et par le point K une parallèle à AC. Ces droites se coupent au point I. Démontrer que le point I est sur la symédiane issue de A.

Note. — Les solutions de ces questions seront insérées dans les *Nouvelles Annales*.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1882

(voir 3e série, t. I, p. 413);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

1. *Étant donnés un cercle de rayon r et un point* A *dans son plan, à une distance d du centre, on suppose menée par le point* A *une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné* m^2.

Démontrer que, si α *désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point* A, *on aura la formule*

$$\cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}. \tag{1}$$

Discussion. — *Limites de m quand on fait varier* α, *le point* A *étant supposé à l'intérieur du cercle.*

Soient B et C les points d'intersection de la sécante avec la circonférence de centre O.

La relation entre les trois côtés et un angle d'un triangle, appliquée aux triangles AOB, AOC, donne

$$r^2 = \overline{AB}^2 + d^2 - 2AB.d\cos\alpha,$$
$$r^2 = \overline{AC}^2 + d^2 - 2AC.d\cos\alpha;$$

d'où, en ajoutant,

$$2r^2 = m^2 + 2d^2 - 2(AB + AC)d\cos\alpha.$$

Abaissant OI perpendiculaire sur la corde BC, on a

$$AI = \frac{AB + AC}{2} = d\cos\alpha,$$

d'où

$$AB + AC = 2d\cos\alpha.$$

Substituant cette valeur dans la relation précédente, il vient

$$2r^2 = m^2 + 2d^2 - 4d^2\cos^2\alpha,$$

d'où

$$2\cos^2\alpha = \frac{m^2 + 2d^2 - 2r^2}{2d^2},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2} \quad (1).$$
(1)

CALCUL LOGARITHMIQUE.

2. *La formule* (1) *étant admise, calculer l'angle* α *à* $0'',1$ *près, en supposant* 1° *la distance d égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et m égal au double de la moyenne proportionnelle entre r et d.*

---

(1) Les limites de m sont évidemment $\sqrt{2r^2 + 2d^2}$, $\sqrt{2r^2 - 2d^2}$.

2° $d = \frac{2}{3}r$, et $m = d\sqrt{3}$.

1° $$d = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1),\quad 2d^2 = r^2(3-\sqrt{5}),$$

$$m^2 = 4dr = 2r^2(\sqrt{5}-1),$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2(\sqrt{5}-2)}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5})}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\sin 18^\circ.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log\sin 18^\circ &= \bar{1}{,}4899824 \\ \log\cos 2\alpha &= \bar{1}{,}7910124 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} 345 & 51^\circ 49' 30'' \\ 221 & 8'',2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 51^\circ 49' 38'',2 \\ \alpha &= 25^\circ 54' 49'',1. \end{aligned}$$

2° $$d^2 = \tfrac{4}{9}r^2,\quad m^2 = 3d^2 = \tfrac{4}{3}r^2,$$

$$\cos 2\alpha = -\tfrac{2}{3}r^2 : \tfrac{8}{9}r^2 = -\tfrac{3}{4} = -0{,}75,$$

$$\log\cos(180^\circ - 2\alpha) = \bar{1}{,}8750613$$

$$\begin{array}{rr} 699 & 41^\circ 24' 30'' \\ 86 & 4'',6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 180^\circ - 2\alpha &= 41^\circ 24' 34'',6 \\ 90^\circ - \alpha &= 20^\circ 42' 17'',3 \\ \alpha &= 69^\circ 17' 42'',7. \end{aligned}$$

3. *On connaît, dans un triangle* ABC, *deux côtés b, c, et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté a. Calculer ce côté et l'angle* A.

(*On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et l'on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.*)

s désignant la surface du triangle, on a, par des formules connues,

$$s^2 = \frac{3a^4}{16} = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16},$$

d'où

$$4a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0,$$

$$a^2 = \frac{(b^2 + c^2) \pm \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2}}{4}$$

ou

$$a^2 = \frac{b^2 + c^2 \pm \sqrt{(3b^2 - c^2)(3c^2 - b^2)}}{4}.$$

Pour que le triangle soit possible, il faut d'abord qu'on ait

$$\frac{c^2}{3} < b^2 < 3c^2$$

ou

$$10b^2c^2 - 3b^4 - 3c^4 > 0.$$

Quand cette condition est remplie, le problème admet deux solutions, si b est différent de c.

En effet, la plus grande des deux valeurs de a^2 est évidemment inférieure à $(b + c)^2$, et la plus petite est supérieure à $(b - c)^2$; car on a

$$b^2 + c^2 - \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)} > 4(b^2 + c^2) - 8bc,$$

$$\sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2} < 8bc - 3(b^2 + c^2) \quad (^1),$$

ou, en élevant au carré, et passant tous les termes dans un même membre,

$$8(b^2 + c^2)^2 + 4(b^2 - c^2)^2 - 48bc(b^2 + c^2) + 64b^2c^2 > 0,$$

$$12(b - c)^4 > 0,$$

relation évidente si b est différent de c.

Lorsque $b = c$, on a $a^2 = b^2$, $a = b = c$; il n'y a plus qu'un triangle, qui est équilatéral.

Calculons maintenant l'angle A.

---

(1) Le second membre, $8bc - 3(b^2 + c^2) = 2bc - 3(b - c)^2$, est une quantité positive si $c > \frac{b}{\sqrt{3}}$, $b > c$.

On a

$$s = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = bc \sin A,$$

d'où

$$a^2 = \frac{2bc \sin A}{\sqrt{3}}$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Égalant ces deux valeurs de a^2, il vient, en divisant par $4bc$,

$$\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4bc},$$

ou, en remarquant que $\frac{1}{2} = \cos 60°$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$,

$$\sin(A + 60°) = \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4bc}.$$

Pour que le triangle soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{3(b^2+c^2)^2}{16b^2c^2} < 1$$

ou

$$3b^4 + 3c^4 - 10b^2c^2 < 0,$$

condition identique à celle qui a été trouvée plus haut. Si elle est remplie, en appelant θ le plus petit angle ayant pour sinus $\frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4bc}$, on aura

$$\sin\theta = \frac{b^2+c^2}{2bc} \sin 60° > \sin 60°, \quad \text{si } b \gtrless c,$$

d'où

$$\theta > 60°,$$
$$A = \theta - 60°,$$
$$A = 180° - \theta - 60°;$$

il y a deux triangles satisfaisant à la question. Si $b = c$, on a

$$\theta = 60°,$$

et simplement

$$A = 60^\circ;$$

il n'y a qu'un triangle, qui est équilatéral.

Ce sont les résultats obtenus dans la première discussion.

LES MOMENTS D'INERTIE POLAIRES DU TRIANGLE, PAR RAPPORT A SES POINTS REMARQUABLES;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

---

1. Conservons les notations adoptées dans l'article relatif aux distances du centre de gravité aux points remarquables d'un triangle (même tome, p. 368 et 369). Représentons par M la masse du triangle, supposé homogène et d'une épaisseur constante.

On sait que le moment d'inertie polaire du triangle, par rapport à son centre de gravité G, est

$$I_G = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) \quad (^1).$$

2. Les *moments d'inertie par rapport aux sommets* A, B, C seront donc

$$I_A = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) + M.\overline{GA}^2$$

ou

$$I_A = \frac{1}{12} M(3b^2 + 3c^2 - a^2),$$

$$I_B = \frac{1}{12} M(3c^2 + 3a^2 - b^2),$$

$$I_C = \frac{1}{12} M(3a^2 + 3b^2 - c^2).$$

---

(1) LAURENT, *Mécanique rationnelle*, 2e édition, t. I, p. 201.

3. Le *moment d'inertie par rapport au centre* O *du cercle circonscrit* sera de même

$$I_O = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) + M.\overline{GO}^2$$

ou bien

$$I_O = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) + MR^2 - \frac{1}{9} M(a^2 + b^2 + c^2),$$

c'est-à-dire

$$I_O = MR^2 - \frac{1}{12} M(a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Le *moment d'inertie du triangle par rapport au point de concours* H *des hauteurs* étant donné par

$$I_H = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) + M.\overline{GH}^2,$$

on trouve, en remplaçant $\overline{GH}^2$ par sa valeur

$$4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

que

$$I_H = 4MR^2 - \frac{5}{12}(a^2 + b^2 + c^2).$$

5. On verrait de la même façon que le moment d'inertie polaire du triangle, par rapport au centre I du cercle inscrit, est

$$I_I = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) + M.\overline{GI}^2$$

ou, puisque

$$\overline{GI}^2 = \frac{1}{3}(bc + ca + ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - 4Rr,$$

$$I_I = \frac{1}{2} M(bc + ca + ab) - \frac{1}{12} M(a + b + c)^2 - 4MRr.$$

6. Changeant dans cette formule successivement le

signe de a, b, c et substituant à $-r$, respectivement les rayons r', r'', r''', on obtient les moments d'inertie du triangle par rapport aux centres I', I'', I''' des cercles exinscrits. On trouve ainsi que

$$I_{I'} = \frac{1}{2}M(bc - ca - ab) - \frac{1}{12}M(b + c - a)^2 + 4MRr',$$

$$I_{I''} = \frac{1}{2}M(ca - ab - bc) - \frac{1}{12}M(c + a - b)^2 + 4MRr'',$$

$$I_{I'''} = \frac{1}{2}M(ab - bc - ca) - \frac{1}{12}M(a + b - c)^2 + 4MRr'''.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1399

(voir 3ᵉ série, t. I, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

En chaque point d'une conique on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu de l'intersection du diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la corde normale. (E. FAUQUEMBERGUE.)

1° Soient

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation d'une ellipse, et x_1, y_1 les coordonnées d'un point pris sur la courbe. L'équation de la normale en ce point est

$$(2) \qquad b^2x_1y - a^2y_1x + c^2x_1y_1 = 0.$$

Éliminant y entre ces deux équations, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection de la

normale et de l'ellipse, l'équation

$$(b^6x_1^2 + a^6y_1^2)x^2 - 2a^4c^2x_1y_1^2x + a^2c^4x_1^2y_1^2 - a^2b^6x_1^2 = 0,$$

qui admet la racine $x = x_1$. Divisant par $x - x_1$ et égalant le quotient à zéro, on a pour abscisse du second point d'intersection de la corde normale

$$x' = -\frac{x_1[b^6x_1^2 + a^4(2b^2 - a^2)y_1^2]}{b^6x_1^2 + a^6y_1^2},$$

d'où

$$y' = -\frac{y_1[a^6y_1^2 + b^4(2a^2 - b^2)x_1^2]}{b^6x_1^2 + a^6y_1^2}.$$

L'équation de la tangente à l'ellipse en ce point est

$$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0$$

ou

$$\begin{gathered} b^2xx_1[b^6x_1^2 + a^4(2b^3 - a^2)y_1^2] \\ + a^2yy_1[a^6y_1^2 + b^4(2a^2 - b^2)x_1^2] + a^2b^2(b^6x_1^2 + a^6y_1^2) = 0, \end{gathered}$$

qu'on peut écrire

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &(b^2xx_1 - a^2yy_1)(b_1^{26}x - a^6y_1^2) \\ &\quad + 2a^4b^4(xx_1y_1^2 + yy_1x_1^2) + a^2b^2(b^6x_1^2 + a^6y_1^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation du diamètre passant par le point (x_1, y_1) est

$$(4) \qquad \frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1},$$

et l'on a la relation

$$(5) \qquad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant x_1 et y_1 entre ces trois équations.

Des deux dernières on tire

$$x_1 = \frac{abx}{-\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}}, \quad y_1 = \frac{aby}{-\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}}.$$

Reportant ces valeurs dans l'équation (3), on a, en divisant par $a^3 b^3$,

$$(b^2x^2 - a^2y^2)(b^6x^2 - a^6y^2) + 4a^4b^4x^2y^2$$
$$= ab(b^6x^2 + a^6y^2)\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2},$$

ou, en élevant au carré,

$$[b^8x^4 + a^8y^4 - a^2b^2(a^4 + b^4 - 4a^2b^2)x^2y^2]^2$$
$$= a^2b^2(b^6x^2 + a^6y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2).$$

L'équation est du huitième degré; mais, comme elle ne contient que des termes du huitième et du sixième degré, on peut la résoudre en coordonnées polaires. On a

$$r^2 = \frac{a^2b^2(a^6\sin^2\theta + b^6\cos^2\theta)^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}{[a^8\sin^4\theta + b^8\cos^4\theta - a^2b^2(a^4 + b^4 - 4a^2b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta]^2}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux axes et touche l'ellipse à ses quatre sommets.

Pour l'hyperbole, il suffirait de changer b^2 en $-b^2$.

2° Soient

$$y^2 = 2px$$

et

$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$$

l'équation d'une parabole et celle de sa normale au point x_1, y_1. Éliminant x entre ces deux équations, et supprimant de l'équation résultante la racine $y = y_1$, on a, pour l'ordonnée du second point d'intersection de la corde normale et de la parabole,

$$y' = -\frac{y_1^2 + p^2}{y_1},$$

d'où

$$x' = \frac{(y_1^2 + p^2)^2}{2py_1^2}.$$

La tangente au point (x', y'), a pour équation

$$\frac{-y(y_1^2 + p^2)}{y_1} = \frac{2py_1^2x + (y_1^2 + p^2)^2}{2y_1^2},$$

et le lieu de son intersection avec le diamètre $y = y_1$,

$$(y^2+p^2)^2+2y^2(y^2+p^2)+2py^2x=0$$

ou

$$(y^2+p^2)(3y^2+p^2)+2py^2x=0.$$

La courbe située tout entière du côté des x négatifs est symétrique par rapport à l'axe de la parabole qui est asymptote des deux branches : elle est limitée vers la droite à l'abscisse $x = -p(2+\sqrt{3})$.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez et par un anonyme.

Question 1401

(voir 3e série, t. I, p. 240);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Soit q_p le quotient de la division de n par p, on a

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+\ldots+q_n^2=q_1+3q_2+5q_3+\ldots+(2n-1)q_n.$$

(E. Césaro.)

Soit r le reste de la division de n par p, posons $q_p = \mathrm{P}$. De

(1) $$n = p\mathrm{P}+r \quad \text{ou} \quad \frac{n}{\mathrm{P}} = p+\frac{r}{\mathrm{P}},$$

on conclut que q_{P} est égal ou supérieur à p suivant que $r < \mathrm{P}$ ou $r \overset{=}{>} \mathrm{P}$.

L'égalité (1) revient à

$$n = (\mathrm{P}+1)p-(p-r),$$

et, parce que $r < p$, on a

$$n < (\mathrm{P}+1)p, \quad \frac{n}{\mathrm{P}+1} < p,$$

c'est-à-dire que le quotient $q_{\mathrm{P}+1}$ est inférieur à p.

On a évidemment

$$n = q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_{P-1} \geq q_P \geq q_{P+1} \geq \ldots \geq q_n.$$

Il résulte de ce qui précède que dans la suite

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{P-1}, q_P, q_{P+1}, \ldots, q_n,$$

il y a P ou q_p quotients qui sont égaux ou supérieurs à p.

Par la même raison, il y aura q_{p+1} quotients égaux ou supérieurs à $p+1$. Donc le nombre des quotients égaux à p est $q_p - q_{p+1}$.

Ainsi, la somme

$$s = q_1^\alpha + q_2^\alpha + q_3^\alpha + \ldots + q_{n-1}^\alpha + q_n^\alpha,$$

contient

$q_1 - q_2$ termes égaux à 1^α,
$q_2 - q_3$ » 2^α,
$q_3 - q_4$ » 3^α,
....

et enfin

$q_n - q_{n+1}$ ou q_n termes égaux à n^α.

Donc on a, quel que soit l'exposant α,

$$s = (q_1 - q_2)1^\alpha + (q_2 - q_3)2^\alpha + (q_3 - q_4)3^\alpha + \ldots + (q_{n-1} - q_n)(n-1)^\alpha + q_n n^\alpha,$$

d'où

$$q_1^\alpha + q_2^\alpha + q_3^\alpha + \ldots + q_n^\alpha = q_1 1^\alpha + q_2(2^\alpha - 1^\alpha) + q_3(3^\alpha - 2^\alpha) + \ldots + q_n[n^\alpha - (n-1)^\alpha].$$

En faisant $\alpha = 2$, on a

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots + q_n^2 = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + \ldots + (2n-1)q_n,$$

ce qui est la relation proposée.

Question 1453

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Le nombre $\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ *est la somme des carrés de deux nombres entiers.* (CATALAN.)

Posons

$$(\sqrt{2}+1)^{2n-1}=x\sqrt{2}+y, \quad (\sqrt{2}-1)^{2n-1}=x\sqrt{2}-y;$$

x n'est autre chose que le nombre proposé (¹).

En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient l'équation

$$2x^2-y^2=1$$

ou encore

$$x^2=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}+1\right)^2,$$

équation de la forme

$$X^2=Y^2+Z^2,$$

dont les solutions en nombres entiers sont données par les formules

$$X=a^2+b^2, \quad Y=a^2-b^2, \quad Z=2ab,$$

où a et b représentent des nombres entiers.

Le nombre proposé est donc bien la somme de deux carrés.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

(¹) Et y est un nombre entier impair.

Question 1463

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 383);

PAR M. JOSEPH CHAMBON (¹).

Étant donné un point P *sur une ellipse de centre* O, *on mène en ce point une tangente et la normale qui touche au point* Q *la développée de l'ellipse, et l'on fait passer un cercle par les extrémités* R, R′ *du diamètre conjugué à* OP, *et par la projection* S *du centre* O *sur la tangente en* P, *puis l'on prolonge* OS *jusqu'à sa rencontre en* S′ *avec le cercle; démontrer que* OS′ = PQ.

La droite PQ est, comme on sait, le rayon de courbure de l'ellipse au point P. Et, en nommant a, b les demi-axes de l'ellipse et b' le demi-diamètre conjugué à OP, on a

$$PQ = \frac{b'^3}{ab}$$

(*voir*, dans le *Traité des Sections coniques* de G. SALMON, les expressions des rayons de courbure).

D'autre part, OS étant la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse à la tangente PS, on a

$$OS = \frac{ab}{b'}.$$

Donc le produit

$$PQ \times OS = \frac{b'^3}{ab} \times \frac{ab}{b'} = b'^2.$$

Mais, les cordes SS′, RR′ du cercle RSR′ se coupant au point O, on a

$$OS' \times OS = OR' \times OR = OR^2 = b'^2.$$

(¹) Lorsque M. Chambon nous a adressé l'énoncé et la solution de la question 1463, il était élève au Lycée de Bordeaux.

Les égalités $PQ \times OS = b'^2$ et $OS' \times OS = b'^2$ donnent $OS' = PQ$. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Rénoy.

Question 1466

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 384);

PAR M. MAURICE RACLOT,
Élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

ABCD *étant un trapèze, on joint les extrémités* A *et* D *du côté oblique* AD *à un point* M *du côté* BC; *on mène une parallèle à* DM *par le point* B *et une parallèle à* AM *par le point* C. *Démontrer que ces deux droites se coupent sur* AD.

(D'OCAGNE.)

Soient O et O′ les points de rencontre du côté AD, et des parallèles aux droites DM, AM, menées des points B et C.

Je prolonge les côtés AD, BC du trapèze jusqu'à leur rencontre en K.

On a, en vertu des parallèles AM, O′C, l'égalité de rapports

$$\frac{KO'}{KA} = \frac{KC}{KM},$$

d'où

$$KO' = \frac{KA.KC}{KM}.$$

De même, le parallélisme des droites DM, OB donne

$$\frac{KO}{KD} = \frac{KB}{KM},$$

d'où

$$KO = \frac{KD.KB}{KM}.$$

Mais, les bases AB, DC du trapèze ABCD étant pa-

rallèles, on a

$$\frac{KA}{KD} = \frac{KB}{KC},$$

d'où

$$KA.KC = KD.KB, \quad \text{et par suite} \quad KO = KO';$$

c'est-à-dire que les deux points O et O′ coïncident.

Donc, les droites menées des points B et C, parallèlement à DM et AM, se coupent sur AD. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Romero et Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1473. I. Les deux droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés sont rectangulaires.

II. Le lieu du point de concours des deux droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés est le cercle des neuf points. (N. GOFFART).

1474. a, x, y étant des nombres entiers, chaque valeur de x qui vérifie l'équation

$$(a^2+1)x^2 = y^2+1$$

est la somme de trois carrés. Il y a exception pour $x=1$, et pour $x = 2(4a^2+1)$. (E. CATALAN.)

1475. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2+y^2 = u^2+v^2+1.$$

(E. CATALAN.)

1476. Trouver les solutions entières de l'équation

$$x^3+x^2+x+1 = v^2.$$

(LIONNET.)

1477. ABC est un triangle rectangle en A. D'un point quelconque M pris sur le côté AB, on abaisse sur la hauteur AH la perpendiculaire MP; par le point P, on élève à la droite CP la perpendiculaire PQ qui coupe AB prolongé au point Q.

Démontrer que $AQ = BM$. (D'OCAGNE.)

1478. Par un point O de l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués d'une quadrique et on mène le plan passant par les pieds de ces trois perpendiculaires. Ce plan et les plans analogues obtenus en faisant varier le système des trois plans diamétraux conjugués passent par un même point M. Trouver le lieu du point M lorsque, le point O restant fixe, la quadrique tourne autour d'une droite.

(PELLET.)

1479. g étant une racine primitive de p^ν, la fonction

$$x + x^{g^2} + x^{g^4} + \ldots + x^{g^{p^{\nu-1}(p-1)-2}},$$

où tous les exposants de g sont des nombres pairs, est divisible par

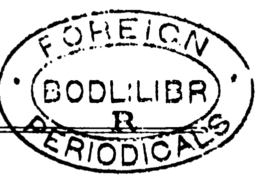
$$\frac{x^{p^\nu} - 1}{x^{p^{\nu-1}} - 1};$$

p est supposé un nombre premier autre que 2, et ν plus grand que 1. (PELLET.)

1480. La somme des puissances $4n$ de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.

Corollaire. — La forme $x^{4n} + y^{4n}$ contient une infinité de nombres premiers.

(CATALAN.)



SUR LA THÉORIE DES TAUTOCHRONES [1];

PAR M. H. RESAL.

1. *Théorie générale.* — On dit qu'une courbe fixe est *tautochrone* lorsqu'un point matériel m, soumis à l'action d'une force extérieure variable en grandeur et en direction suivant une loi donnée, qui est assujetti à décrire cette courbe, arrive dans le même temps en un point déterminé A_1, quel que soit le point de départ A_0 ou pour lequel la vitesse est nulle.

Pour plus de simplicité, nous supposerons la masse du mobile égale à l'unité.

Nous ne considérerons [2] que le cas où la force extérieure dérive d'un potentiel d'une seule variable χ, potentiel que nous représenterons par

$$-f(\chi).$$

Soient χ_0, χ_1 les valeurs de χ en A_0, A_1; v la vitesse du mobile arrivé en un point A correspondant à χ; s l'arc AA_1. Nous avons

$$v = -\frac{ds}{dt}$$

et, d'après le principe des forces vives,

$$v^2 = 2[f(\chi_0) - f(\chi)];$$

---

[1] Extrait du *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique.*

[2] C'est à M. Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, 1844) que l'on doit la méthode qui sert de base à la théorie que nous allons exposer; on trouve dans le *Cours de Mécanique* de Sturm, publié en 1868 par M. Prouhet, l'application de cette méthode, mais seulement dans le cas particulier de la pesanteur.

on déduit de ces deux formules la suivante :

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ds}{\sqrt{f(\chi_0) - f(\chi)}}.$$

Si τ désigne la durée du trajet $A_0 A_1$, nous avons

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\chi_0}^{\chi_1} \frac{\frac{ds}{d\chi}}{\sqrt{f(\chi_0) - f(\chi)}} d\chi$$

ou

$$(1) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\chi_1}^{\chi_0} \frac{\frac{ds}{d\chi}}{\sqrt{f(\chi_0) - f(\chi)}} d\chi.$$

Il nous faut maintenant exprimer que cette durée est indépendante de χ. A cet effet, en désignant par h une constante et par x une nouvelle variable que nous substituerons à χ, nous poserons

$$(2) \qquad \begin{cases} f(\chi_0) - f(\chi_1) = h, \\ f(\chi\ ) - f(\chi_1) = x, \end{cases}$$

d'où

$$(3) \qquad f(\chi_0) - f(\chi) = h - x,$$

avec les conditions

$$(4) \qquad x = 0 \quad \text{pour} \quad \chi = \chi_1,$$

$$(4') \qquad x = h \quad \text{pour} \quad \chi = \chi_0.$$

Lorsque, en général, une courbe est donnée par deux équations entre trois variables, deux de ces variables peuvent s'exprimer au moyen de la troisième, et il en est par suite de même de l'élément d'arc. Nous pourrons donc poser

$$(5) \qquad ds = \varphi(x)dx,$$

et la formule (1), eu égard à la relation (3), devient

$$(6) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^h \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{h - x}}.$$

Remplaçons maintenant x par une nouvelle variable u définie par la relation

$$(7) \qquad x = uh.$$

En remarquant que $u = 1$ pour $x = h$, l'équation (6) devient

$$(8) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\varphi(uh)\sqrt{h}\,du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \varphi(uh)\sqrt{uh}\,\frac{du}{\sqrt{(1-u)u}}.$$

Or, comme c'est la valeur de h qui définit la position du point de départ, il nous reste à exprimer que $\frac{d\tau}{dh} = 0$, ou que

$$\int_0^1 \left[\varphi'(uh)\sqrt{uh} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(uh)}{\sqrt{uh}}\right] \frac{u\,du}{\sqrt{u(1-u)}} = 0.$$

Mais, si l'on attribue à h une valeur suffisamment petite, tous les éléments de cette intégrale seraient de même signe et leur somme ne serait pas nulle. Il faut donc que chacun d'eux soit nul ou que l'on ait

$$\varphi'(uh)\sqrt{uh} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(uh)}{\sqrt{uh}} = 0$$

ou

$$\varphi'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

ou encore

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

d'où, en intégrant et désignant par C une constante,

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

La formule (5) devient alors

$$ds = \varphi(x)\,dx = C\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Si l'on remarque que $s = 0$ pour $x = 0$ ou pour $\chi = \chi_1$, on trouve, en intégrant,

$$s = 2C\sqrt{x}$$

ou

(9) $$s = 2C\sqrt{f(\chi) - f(\chi_1)}.$$

On déduit de là

(10) $$ds = C\frac{f'(\chi)d\chi}{\sqrt{f(\chi) - f(\chi_1)}}$$

ou

(11) $$ds = 2C^2\frac{f'(\chi)d\chi}{s}.$$

Si F_t désigne la composante tangentielle de la forme extérieure, on a, en se rappelant que ds est négatif,

$$-F_t ds = -f'(\chi)d\chi,$$

d'où, en vertu de la formule (11),

$$F_t = f'(\chi)\frac{d\chi}{ds} = \frac{s}{2C}.$$

Mais on sait que

$$F_t = -\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Nous avons donc finalement l'équation

(12) $$\frac{d^2s}{dt^3} = -\frac{s}{2C^2},$$

qui n'est autre chose que celle du mouvement du pendule lorsque l'amplitude de ses oscillations est très petite. Il est donc inutile de remonter à l'équation (8) pour avoir la valeur de τ, qui est la suivante :

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{2C^2} = \frac{\pi C}{\sqrt{2}}.$$

L'équation (10) est l'équation générale des tautochrones dans le cas spécial dont nous venons de nous occuper.

Mais ds s'exprime généralement au moyen des différentielles de trois variables, dont l'une sera χ si l'on veut et dont nous représenterons par z et ζ les deux autres. Le problème est donc indéterminé, puisqu'il faut pour le résoudre se donner une relation entre les trois variables. On voit ainsi que, dans le cas d'un potentiel d'une seule variable, il y aura une infinité de tautochrones dont une au moins sera plane.

2. *Tautochrone dans le cas de la pesanteur.* — Soient z la hauteur du mobile au-dessus du point d'arrivée; on a

$$z = \chi, \quad f(\chi) = gz, \quad f(\chi_1) = f(0) = 0,$$

et la formule (9) donne

$$s = 2C\sqrt{gz}.$$

Si la courbe est comprise dans un plan vertical, elle sera, d'après cette équation, une cycloïde dont la base est horizontale. En enroulant le plan de la cycloïde sur un cylindre vertical quelconque, la courbe résultante sera toujours une tautochrone. On voit ainsi qu'il n'y a qu'une seule tautochrone plane, mais qu'il y a une infinité de tautochrones à double courbure.

Si le mobile est assujetti à rester sur un plan fixe, incliné de l'angle i sur l'horizon, la tautochrone sera encore une cycloïde; puisque, dans ce cas, il est soumis à l'action d'une force, $g \sin i$, dont la direction est constante.

3. *Tautochrone plane dans le cas d'une force attractive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance à ce centre.* La distance r du mobile au centre fixe O devra être substituée à la variable générale χ, et il est évident que la fonction $f(r)$ sera proportionnelle à r^2.

L'équation (9) peut donc, en désignant par K une constante, se mettre sous la forme

$$s = K\sqrt{r^2 - r_1^2}. \tag{12}$$

De cette équation on déduit la suivante

$$\frac{r\,dr}{ds} = \frac{1}{K}\sqrt{r^2 - r_1^2} \tag{13}$$

dont le premier membre représente la sous-normale polaire.

Si θ désigne l'angle formé par r avec un axe fixe Ox partant de l'origine O, on a

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{\frac{r^2\,d\theta^2}{dr^2} + 1},$$

et la formule précédente donne

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r_1^2 + r^2(K^2 - 1)}{r^2 - r_1^2}}, \tag{14}$$

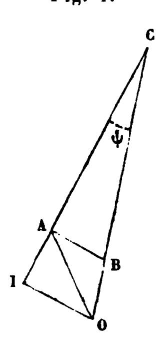
en prenant le signe + ou le signe — selon que r croît ou décroît. Sans nous arrêter à discuter cette dernière formule, nous nous bornerons à faire remarquer que, si 1° $K^2 < 1$, le rayon r est limité et la courbe est comprise entre deux cercles de centre O ayant pour rayons r_1 et $\frac{r_1}{1 - k^2}$; 2° $K^2 = 1$, le lieu se réduit à une droite et l'on retrouve ainsi une propriété connue; 3° $K^2 > 1$, le rayon vecteur r croît indéfiniment et θ devient infini avec lui; la courbe est alors une spirale formée de deux branches symétriques qui s'éloignent indéfiniment du centre d'attraction. Si dans cette dernière hypothèse r_1 est nul, on a, en désignant par M une constante,

$$r = Me^{\pm\frac{\theta}{\sqrt{K^2-1}}},$$

équation d'une spirale logarithmique dont l'origine est le point d'arrivée.

Revenons maintenant à l'interprétation géométrique, que nous avons donnée plus haut, de la formule (13). Soient A (*fig.* 1) un point quelconque de la tauto-

Fig. 1.



chrone; r son rayon vecteur OA; AI la normale en ce point; OI la sous-normale polaire. La formule précitée revient à la suivante

$$(15) \qquad K.OI = \sqrt{r^2 - r_1^2}.$$

Décrivons du point O comme centre, avec un rayon quelconque R', une circonférence qui viendra couper en C la direction de AI et désignons par ψ l'angle ACO. La formule (15) se transforme dans la suivante :

$$(16) \qquad KR' \sin\psi = \sqrt{r^2 - r_1^2},$$

d'après laquelle on voit que l'on doit avoir $\psi = 0$ pour $r = r_1$.

Supposons que le lieu des points A soit la trajectoire d'un point déterminé du plan d'une courbe qui roule sur la circonférence de rayon R'; pour la position A du point décrivant, le contact aura lieu en C. Soit $p =$ AC le rayon

vecteur de la courbe roulante rapportée au pôle relativement fixe A; on a

$$r^2 = p^2 + R'^2 - 2R'p\cos\psi,$$

par suite

$$r_1^2 = p_1^2 + R'^2 - 2R'p_1,$$

en désignant par p_1 la valeur de p correspondant à $r = r_1$ ou à $\psi = 0$. Nous avons ainsi

$$r^2 - r_1^2 = p^2 - p_1^2 - 2R'(p\cos\psi - p_1).$$

Portant cette valeur dans l'équation (16) et résolvant par rapport à $\cos\psi$, on trouve

$$(17)\quad \cos\psi = \frac{p \pm \sqrt{p^2(1-K^2) + (p_1^2 - 2R'p_1 + K^2R'^2)K^2}}{K^2R'}.$$

Admettons qu'il soit possible de profiter de l'indétermination de R' pour annuler le second terme sous le radical; nous aurons

$$(18)\qquad R' = \frac{p_1}{K^2}(1 \pm \sqrt{1-K^2}),$$

ce qui exige que $K \leqq 1$; en admettant qu'il en soit ainsi, la formule (17) se réduit à la suivante

$$(19)\qquad \cos\psi = \frac{p}{K^2R'}(1 \pm \sqrt{1-K^2}).$$

Pour que l'on ait $\cos\psi = 1$ pour $p = p_1$, il faut que les mêmes signes se correspondent dans les deux équations (18) et (19), et alors cette dernière devient

$$(20)\qquad \cos\psi = \frac{p}{p_1}.$$

On voit ainsi que A se trouve sur une circonférence décrite sur $CB = p_1$ comme diamètre. Le lieu de A sera donc l'une ou l'autre des deux hypocycloïdes, engendrées par un point de la circonférence ci-dessus roulant sur les

circonférences ayant O pour centre et pour rayons les racines de l'équation (18). La première de ces racines est supérieure à p_1, la seconde lui est inférieure, comme on le reconnaît en la mettant sous la forme

$$R' = \frac{p_1}{1+\sqrt{1-K^2}}.$$

Si $K=1$, on a $R'=p_1$; les deux circonférences fixes se confondent en une seule et il est visible que le lieu du point A se réduit à la droite de de Lahire.

Considérons maintenant le cas où K est supérieur à l'unité et déterminons R' de manière à rendre minimum le second terme sous le radical de l'équation (17).

Nous trouvons ainsi

$$(21)\qquad R' = \frac{p_1}{K^2},$$

$$(22)\qquad \cos\psi = \frac{p \pm \sqrt{(K^2-1)(p_1^2-p^2)}}{p_1}.$$

La dernière de ces formules peut s'exprimer ainsi

$$(23)\qquad \cos\psi = x \pm \lambda\sqrt{1-x^2},$$

en posant

$$\frac{p}{p_1} = x, \quad \sqrt{K^2-1} = \lambda,$$

et l'on en déduit

$$d\cos\psi = \left(1 \mp \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

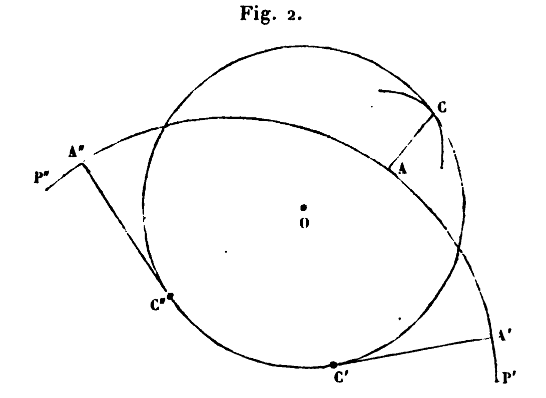
Or, à partir de $x=1$, dx est négatif; $\cos\psi$, qui était égal à l'unité, doit décroître; le signe supérieur du radical dans les formules (22) et (23) doit donc ainsi être rejeté.

Quoi qu'il en soit, on voit que p et, par suite, la courbe roulante seraient limitées, tandis que nous avons vu plus haut que, pour $K>1$, le lieu de A était illimité, ce qui paraît paradoxal.

Mais nous ferons remarquer que le mode de généra-

tion du lieu P′P″ (*fig.* 2) de A, par le roulement d'une courbe sur la circonférence O de rayon R′, n'est réalisable que pour une partie limitée de ce lieu. On voit en effet que le contact de roulement C est déterminé par

Fig. 2.



l'intersection de la circonférence ci-dessus avec la normale en A à P′P″. Soient A′, A″ les positions de A pour lesquelles les normales à P′P″ sont tangentes en C′, C″ à la circonférence. Il peut arriver que les normales menées en dehors de A′A″ ne rencontrent plus cette circonférence, et alors le mode de description admis du lieu de A ne sera plus admissible pour A′P′ et A″P″, et c'est ce qu'il fallait expliquer.

4. *Tautochrone plane dans le cas d'une force répulsive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance de ce centre.* — Il est évident (*fig.* 3) qu'au lieu des formules (12) et (13), (16), nous avons les suivantes :

$$s = K\sqrt{r_1^2 - r^2}, \tag{24}$$

$$\frac{r\,dr}{ds} = -\frac{1}{K}\sqrt{r_1^2 - r^2}, \tag{25}$$

$$KR' \sin\psi = \sqrt{r_1^2 - r^2}. \tag{26}$$

De plus, on voit que

$$r^2 = p^2 + R'^2 + 2R'p\cos\psi,$$
$$r_1^2 = p_1^2 + R'^2 + 2R'p_1;$$

alors l'équation (26) donne

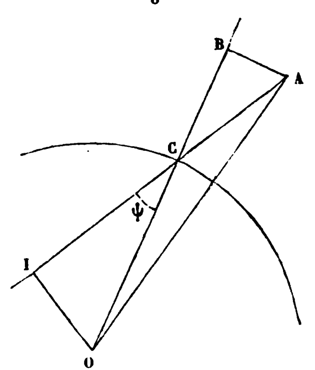
$$(27)\quad \cos\psi = \frac{p \pm \sqrt{p^2(1+K^2) - (p_1^2 + R'p_1 - K^2R'^2)K^2}}{K^2R'}.$$

En égalant à zéro le second terme sous le radical, on trouve

$$R' = \frac{p_1}{K^2}\left(1+\sqrt{1+K^2}\right),$$

en supprimant la racine négative qui n'a aucune signi-

Fig. 3.



fication, et la formule (27) donne, en se rappelant que l'on doit avoir $\psi = 0$, pour $p = p_1$,

$$\cos\psi = \frac{p}{p_1}.$$

On voit donc que dans tous les cas la tautochrone sera une épicycloïde décrite par un point de la circonférence ayant p_1 pour diamètre roulant sur la circonférence fixe de rayon R'.

5. *Tautochrone dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.* — Si nous conservons les notations du n° 1, et si nous désignons par k le coefficient de résistance du milieu, le principe des forces vives donne

$$\frac{1}{2}\,dv^2 = -\,df(\chi) + kv^2\,ds,$$

en se rappelant que ds est négatif. On tire de là

$$\frac{dv^2}{ds} - 2kv^2 + \frac{2\,df(\chi)}{ds} = 0,$$

équation linéaire en v^2 dont l'intégrale est

$$v^2 = -\,2e^{2ks}\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi) = \frac{ds^2}{dt^2},$$

d'où

$$dt = -\,\frac{e^{-ks}\,ds}{\sqrt{-2\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi)}}$$

et

(28) $$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\chi_1}^{\chi_0} \frac{e^{-ks}\,ds}{\sqrt{-\int_{\chi_0}^{\chi_0} e^{-2ks}\,df(\chi)}}.$$

Nous remarquerons que l'on a

$$\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi) = \int_{\chi_0}^{\chi_1} e^{-2ks}\,df(\chi) + \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi).$$

Posons

(29) $$-h = \int_{\chi_0}^{\chi_1} e^{-2ks}\,df(\chi),\quad x = \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi),$$
$$e^{-ks}\,ds = \varphi(x)\,dx,$$

x étant une variable que nous substituerons à χ; nous aurons $x = 0$ pour $\chi = \chi_1$ et $x = h$ pour $\chi = \chi_0$. L'équation (28) devient

(30) $$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{h} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{h - x}}$$

et prend ainsi la même forme que lorsqu'il n'existe pas de milieu. On est donc conduit à poser, en désignant par C une constante,

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} \tag{31}$$

ou

$$e^{-ks}\,ds = \frac{C\,dx}{\sqrt{x}}.$$

Comme on a $s = 0$ pour $\chi = \chi_1$ ou pour $x = 0$, il vient, en intégrant,

$$-\frac{1}{k}(e^{-2ks} - 1) = 2C\sqrt{x}.$$

En élevant au carré et remplaçant x par sa valeur (29), on trouve

$$\frac{1}{4k^2C^2}(e^{-ks} - 2e^{-ks} + 1) = \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi).$$

Si nous différentions, nous trouvons

$$\frac{1}{2k^2C}(-1 + e^{ks})\,ds = df(\chi).$$

En intégrant maintenant et remarquant que $s = 0$ pour $\chi = \chi_1$, il vient

$$\frac{1}{2KC^2}\left(-s + \frac{e^{ks} - 1}{k}\right) = f(\chi) - f(\chi_1)$$

pour l'équation générale des tautochrones.

On remarquera que τ a la même valeur que dans le vide, en vertu de la formule (16) et de l'expression (17) de la fonction $\varphi(x)$, et il est facile de démontrer que la composante tangentielle de la force

$$-f'(\chi)\frac{d\chi}{ds} - kv^2$$

est proportionnelle à s.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

Soit proposé de résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée

$$x^2 + nxy - ny^2 = 1,$$

dans laquelle n est un entier donné.

On s'assure facilement, par la substitution directe, que si une solution particulière est donnée par l'égalité

$$\alpha^2 + n\alpha\beta - n\beta^2 = 1,$$

on arrivera à une nouvelle solution au moyen des formules

$$\begin{cases} x = (n+1)\alpha - n\beta, \\ y = (n+2)\alpha - (n+1)\beta, \end{cases}$$

en admettant que n est différent de -1 et de -2.

Cette solution, cependant, n'en produit pas d'autre, vu que, en y appliquant les mêmes formules, on retombe sur les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$. Mais la nature même de l'équation nous conduit à assigner une troisième solution distincte de la première et associée à la seconde, après quoi la continuation du procédé donnera naissance à une infinité de solutions subséquentes.

D'après cela, les valeurs initiales $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ayant amené les valeurs $x = n+1$, $y = n+2$, résolvons l'équation par rapport à l'inconnue x, après y avoir fait $y = n+2$. Il nous viendra

$$x = -\frac{n(n+2)}{2} \pm \frac{n^2 + 4n + 2}{2},$$

où le signe supérieur correspond à la solution précédente, tandis que le signe inférieur nous met en présence de la solution associée

$$\begin{cases} x = -(n^2 + 3n + 1), \\ y = n + 2, \end{cases}$$

ou, en changeant les signes de x et de y, ce qui n'altère pas le résultat de la substitution dans la proposée,

$$\begin{cases} x = n^2 + 3n + 1, \\ y = -(n + 2). \end{cases}$$

De celle-ci, par les mêmes formules, dérive une nouvelle solution, accompagnée d'une autre qui lui est associée, et ainsi de suite.

Remarque. — Écrivons les valeurs successives de x comme il suit :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, \\
x_2 &= 1 + n, \\
x_3 &= 1 + 3n + n^2, \\
x_4 &= 1 + 6n + 5n^2 + n^3, \\
x_5 &= 1 + 10n + 15n^2 + 7n^3 + n^4, \\
x_6 &= 1 + 15n + 35n^2 + 28n^3 + 9n^4 + n^5, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

où le terme indépendant de n est partout égal à l'unité. Nous reconnaîtrons aussitôt que les coefficients de n sont donnés par la suite des nombres triangulaires; ceux de n^2 par la suite des nombres figurés du quatrième ordre; ceux de n^3 par la suite des nombres figurés du sixième ordre, etc. On est conduit à conclure de là que l'on doit avoir, en général,

$$x_a = 1 + \frac{(a-1)a}{2} n + \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2.3.4} n^2 + \frac{(a-3)(a-2)\dots(a+2)}{2.3.4.5.6} n^3 + \dots + n^{a-1},$$

le coefficient de n^k étant

$$\frac{(a-k)(a-k+1)(a-k+2)\ldots(a+k-1)}{2.3.4\ldots(2k-1).2k},$$

et c'est ce qui a lieu en effet; la vérification est facile, et nous ne nous y arrêterons pas.

Quant aux valeurs de y, on observera d'abord que, par la méthode même, chaque valeur d'indice impair est égale et de signe contraire à celle qui la précède, d'indice pair; c'est-à-dire que l'on a constamment

$$y_{2k+1} = -y_{2k}.$$

Il ne sera pas difficile d'établir ensuite la formule générale

$$y_a = a + \frac{(a-1)a(a+1)}{2.3} n + \frac{(a-2)(a-1)\ldots(a+2)}{2.3.4.5} n^2 + \frac{(a-3)(a-2)\ldots(a+3)}{2.3.4.5.6.7} n^3 + \ldots + n^{a-1},$$

pour toute valeur paire de l'indice a. On voit ici apparaître, comme coefficients des différentes puissances de n, les nombres figurés d'ordre impair, de même que les nombres d'ordre pair se sont présentés dans l'expression de x_a. Le coefficient de n^k, dans y_a, est

$$\frac{(a-k)(a-k+1)(a-k+2)\ldots(a+k)}{2.3.4\ldots(2k+1)}.$$

Signalons la relation

$$y_a - y_{a-2} = x_{a-1} + x_a,$$

qui a lieu pour toute valeur paire de a, et d'où l'on déduit

$$y_a = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{a-1} + x_a.$$

Cette formule nous reproduit (d'après la sommation connue des séries relatives aux nombres figurés) l'expression ci-dessus de y_a en fonction de n.

Nous ajouterons, en terminant, que l'équation qui vient d'être traitée est un cas particulier d'une classe d'équations appartenant à la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 = h,$$

et dont la résolution s'obtient par des moyens analogues, sans avoir recours aux méthodes générales.

SUR LES PROPRIÉTÉS SEGMENTAIRES DU TRIANGLE.

SOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL : MENER PAR LE SOMMET D'UN TRIANGLE UNE DROITE QUI DIVISE LE COTÉ OPPOSÉ EN SEGMENTS PROPORTIONNELS AUX PUISSANCES $n^{\text{ièmes}}$ DES CÔTÉS ADJACENTS,

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La bissectrice divise dans le triangle le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents; la ligne que nous avons appelée *symédiane* (1), c'est-à-dire la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice, divise le côté opposé, ainsi que nous l'avons démontré, en parties proportionnelles aux carrés des côtés adjacents. Nous avons été ainsi amené à nous poser le problème énoncé dans le sous-titre de cette Note, et à essayer de le résoudre par une construction géométrique *directe*.

Nous avons tenu d'ailleurs à ce que notre solution fût purement géométrique et élémentaire. Elle est tout entière contenue dans le théorème général que voici et qui, croyons-nous, n'a jamais été remarqué :

THÉORÈME. — *Si la droite* AX, *issue du sommet* A

---

(1) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. II, p. 450.

d'un triangle, divise le côté opposé BC *dans le rapport* $\frac{XB}{XC} = \frac{\overline{AB}^n}{\overline{AC}^n}$, *si le point* X_1 *est le symétrique du point* X *par rapport au milieu* M *du côté* BC, *enfin si la droite* AY *est symétrique de la droite* AX_1 *par rapport à la bissectrice* AE *de l'angle* BAC, *cette droite* AY *divise le côté* BC *dans le rapport* $\frac{YB}{YC} = \frac{\overline{AB}^{n+2}}{\overline{AC}^{n+2}}$.

Soient

X_1P et X_1Q les perpendiculaires abaissées du point X_1 sur les côtés AB et AC;

YU et YV les perpendiculaires abaissées du point Y sur les mêmes côtés;

AH la hauteur abaissée du sommet A.

Nous avons

$$\frac{X_1P}{AH} = \frac{X_1B}{AB}, \quad \frac{X_1Q}{AH} = \frac{X_1C}{AC}.$$

Donc

$$\frac{X_1P}{X_1Q} = \frac{X_1B.AC}{X_1C.AB}$$

ou, puisque $X_1B = XC$ et $X_1C = XB$,

$$\frac{X_1P}{X_1Q} = \frac{XC.AC}{XB.AB} = \frac{\overline{AC}^{n+1}}{\overline{AB}^{n+1}}.$$

La droite AY étant symétrique de AX_1 par rapport à la bissectrice AE de l'angle BAC, on a

$$\frac{YU}{YV} = \frac{X_1Q}{X_1P} = \frac{\overline{AB}^{n+1}}{\overline{AC}^{n+1}};$$

et comme $\frac{YU}{AH} = \frac{YB}{AB}$, $\frac{YV}{AH} = \frac{YC}{AC}$, on a aussi

$$\frac{YU}{YV} = \frac{YB.AC}{YC.AB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{YB.AC}{YC.AB} = \frac{\overline{AB}^{n+1}}{\overline{AC}^{n+1}}$$

et, par suite,

$$\frac{YB}{YC} = \frac{\overline{AB}^{n+2}}{\overline{AC}^{n+2}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Le théorème précédent permet de faire dériver géométriquement la droite issue du sommet A, qui divise le côté BC dans le rapport $\frac{AB^n}{AC^n}$, de la bissectrice ou de la symédiane, suivant que n sera impair ou pair, puisqu'il permet de faire croître l'exposant n de deux en deux unités.

Remarque I. — Le théorème peut être pris à l'inverse et permet alors d'étendre la construction au cas où l'exposant n est négatif, c'est-à-dire où les segments sont inversement proportionnels à des puissances données des côtés adjacents.

Remarque II. — Il résulte de la démonstration que, si $\frac{YB}{YC} = \frac{\overline{AB}^{n+2}}{\overline{AC}^{n+2}}$, on a

$$\frac{YU}{YV} = \frac{\overline{AB}^{n+1}}{\overline{AC}^{n+1}};$$

on voit par là que le théorème précédent permet aussi de diviser l'angle BAC en deux parties dont les sinus soient proportionnels à des puissances données des côtés adjacents.

Remarque III. — Il est bien clair que les trois droites issues respectivement des trois sommets et divisant les côtés opposés proportionnellement à la même puissance n des côtés adjacents concourent au même point.

Ce point est tel que ses distances aux trois côtés sont proportionnelles aux puissances $n - 1$ de ces côtés.

Il se confond avec le point pour lequel la somme des

puissances $\frac{n}{n-1}$ des distances aux trois côtés du triangle est minimum.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1881,

SECONDE SESSION

(voir 3e série, t. I, p. 365);

SOLUTION DE M. ALFRED CHAMBEAU,
Élève du Lycée Condorcet.

On donne une parabole $y^2 = 2px$, *rapportée à son axe et à son sommet, et un point* $P(\alpha, \beta)$ *dans le plan de la courbe :*

1° *Démontrer que du point* P *on peut, en général, mener trois normales à la parabole ; former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds* A, B, C *de ces normales ;*

2° *Démontrer que chacune des deux courbes*

$$xy + (p-\alpha)y - p\beta = 0,$$
$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0,$$

passe par les quatre points A, B, C, P *et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points ;*

3° *Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes* A, B, C *et en un quatrième point* D ; *trouver les coordonnées du point* D ;

4° *Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes ; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre

avec la parallèle DD′ *menée à l'axe de la parabole par le point* D;

Former et discuter le lieu de ce point de rencontre.

1° L'équation de la parabole est

$$y^2 = 2px; \tag{1}$$

celle de la normale

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

La normale devant passer par le point P(α, β), on a la condition

$$\beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x).$$

Les points d'incidence sont à l'intersection de la parabole avec l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0; \tag{2}$$

il y a ordinairement trois points d'intersection, et par suite trois normales. Si l'hyperbole est tangente à la parabole, il n'y a plus que deux solutions; enfin, d'après la position même des deux coniques, il y a toujours un point réel d'intersection.

Cherchons l'équation aux ordonnées des points d'incidence; éliminant x entre les équations (1) et (2), on obtient

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0, \tag{3}$$

équation du troisième degré qui montre qu'il y aura ordinairement trois solutions; elle a d'ailleurs toujours une racine réelle.

La condition pour que cette équation ait une racine double est, après simplification,

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 = 0.$$

C'est le lieu des points P par lesquels on peut mener deux normales à la parabole, c'est la *développée de la parabole;* cette courbe divise le plan en deux régions : dans l'une on a

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 > 0$$

et l'on ne peut mener par un point qu'une normale à la parabole; dans l'autre on a

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 < 0$$

et l'on peut mener d'un point trois normales à cette courbe.

2° L'équation

$$(4) \qquad y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

représente une ellipse, et elle résulte de l'élimination de p entre les équations (1) et (2), car de l'équation (1) on tire

$$p = \frac{y^2}{2x};$$

remplaçant p par $\frac{y^2}{2x}$ dans l'équation (2), on a

$$y(y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0,$$

équation qui donne $y = 0$, axe des x, et

$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0,$$

résultant de la combinaison des équations (1) et (2). Cette équation représente une conique passant par les points d'intersection de la parabole et de l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire par les pieds des normales menées du point P; on vérifie de même facilement que le point P est sur cette ellipse.

Il suit de là que l'équation générale des coniques passant par les quatre points A, B, C, P est

$$(5) \quad xy + (p - \alpha)y - p\beta + \lambda(y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0.$$

3° Nous savons que les coniques représentées par l'équation (5) coupent la parabole aux points A, B, C. Cherchons les coordonnées du quatrième point d'intersection D : l'équation aux ordonnées de ce point s'obtient en éliminant x entre les équations (1) et (5), ce qui donne

$$p[y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta] + \lambda y[y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta] = 0$$

ou

$$[y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta](\lambda y + p) = 0$$

et, par suite, les deux équations

$$y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

correspondant aux trois points A, B, C, et $\lambda y + p = 0$ ou $y = -\frac{p}{\lambda}$, ordonnée du point D. Son abscisse, tirée de l'équation (1), est

$$x = \frac{p}{2\lambda^2}.$$

4° L'équation (5) ordonnée est

$$(6)\qquad \lambda y^2 + xy + 2\lambda x^2 + (p - \alpha - \beta\lambda)y - 2\lambda\alpha x - p\beta = 0;$$

l'équation donnant les directions asymptotiques est

$$(7)\qquad \lambda y^2 + xy + 2\lambda x^2 = 0.$$

En retranchant ces deux équations membre à membre, on a

$$(8)\qquad (p - \alpha - \beta\lambda)y - 2\lambda\alpha x - p\beta = 0.$$

C'est l'équation de la droite passant par les points d'intersection de la conique et des directions asymptotiques. La parallèle à l'axe de la parabole passant par le point D a pour équation

$$(9)\qquad y = -\frac{p}{\lambda}.$$

Éliminons λ entre les équations (8) et (9), nous aurons l'équation du lieu demandé

$$y^2 = \frac{2p\alpha}{\alpha - p} x,$$

équation d'une parabole ayant même axe et même sommet que la parabole donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Sequestre, Maître-Répétiteur au Lycée d'Angoulême.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882;

SOLUTION ANALYTIQUE DE M. A. HILAIRE,

Professeur au lycée de Douai (1).

On donne deux cercles se coupant aux points A *et* B. *Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre l'hyperbole équilatère, qui a ces points pour sommets, en deux autres points* C *et* D :

1° *Démontrer que la droite* CD *passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par* A *et* B, *sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences* E *et* F ;

3° *Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences* E *ou* F ; *démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux circonférences données.*

---

(1) Une solution géométrique a été donnée dans le numéro d'août 1882.

Préliminaires. — Je prends pour équations des deux cercles donnés

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2 + b^2 = r^2,$$
$$x^2 + 2a'x + y^2 - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+a')^2 + y^2 = a'^2 + b^2 = r'^2.$$

La conique devant passer par les points A et B et être tangente à chacun des deux cercles, son équation peut être mise sous l'une des deux formes suivantes :

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 - \lambda x[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0,$$
$$x^2 + 2a'x + y^2 - b^2 - \lambda' x[(x+a')\cos\alpha' + y\sin\alpha' - r'] = 0\text{ (1)},$$

ou, en développant,

$$x^2(1-\lambda\cos\alpha) - xy\lambda\sin\alpha + y^2 - x(2a - \lambda a\cos\alpha - \lambda r) - b^2 = 0,$$
$$x^2(1-\lambda'\cos\alpha') - xy\lambda'\sin\alpha' + y^2 + x(2a' - \lambda' a'\cos\alpha' + \lambda' r') - b^2 = 0.$$

Ces deux dernières équations représentent une même conique; les termes en y^2 ont le même coefficient, les termes indépendants sont égaux; donc les autres coefficients doivent être égaux.

$$(1) \qquad 1 - \lambda\cos\alpha = 1 - \lambda'\cos\alpha',$$
$$(2) \qquad \lambda\sin\alpha = \lambda'\sin\alpha',$$
$$(3) \qquad \lambda(a\cos\alpha + r) - 2a = 2a' + \lambda'(r' - a'\cos\alpha').$$

Les équations (1) et (2) donnent $\tang\alpha' = \tang\alpha$, ce qui fait deux cas à distinguer.

Premier cas : $\alpha' = \alpha$.

T étant le point de contact de la conique avec le premier cercle, et T' avec le second,

T' est homologue de T, la droite TT' passe par le centre de similitude *externe* des deux cercles.

On a

$$\cos\alpha' = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda.$$

(1) α et α' sont les angles que forment avec l'axe des x les rayons menés des centres des deux cercles à leurs points de contact T, T' avec la conique.

Deuxième cas : $\alpha' = \alpha + \pi$.

T étant le point de contact avec le premier cercle, et T'' avec le second, T'' est diamétralement opposé à T'. La droite TT'' passe par le centre de similitude *interne* des deux cercles donnés.

On a

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha \quad \text{et} \quad \lambda' = -\lambda.$$

En résumé, $\lambda' = \pm\lambda$ avec $\cos\alpha' = \pm\cos\alpha$, les signes allant ensemble.

La relation (3) devient

$$\lambda(a\cos\alpha + r) - 2a \\ = 2a' \pm \lambda(r' \mp a'\cos\alpha) = 2a' - \lambda a'\cos\alpha \pm \lambda r',$$

d'où

$$\lambda = \frac{2(a+a')}{(a+a')\cos\alpha + r \mp r'},$$

et, parce que $a + a'$ est égal à la distance d des deux centres,

$$\lambda = \frac{2d}{d\cos\alpha + r \mp r'};$$

$r - r'$ correspond au premier cas, et $r + r'$ au deuxième.

Détermination du genre de la conique représentée par l'équation

$$x^2(1 - \lambda\cos\alpha) - xy\lambda\sin\alpha + y^2 \\ - x(2a - \lambda a\cos\alpha - \lambda r) - b^2 = 0.$$

On a

$$\lambda^2\sin^2\alpha - 4(1 - \lambda\cos\alpha) \\ = \lambda^2(1 - \cos^2\alpha) - 4(1 - \lambda\cos\alpha) = \lambda^2 - (2 - \lambda\cos\alpha)^2,$$

et, en remplaçant λ par $\dfrac{2d}{d\cos\alpha + r \mp r'}$, il vient

$$\lambda^2 - (2 - \lambda\cos\alpha)^2 = \frac{4[d^2 - (r \mp r')^2]}{(d\cos\alpha + r \mp r')^2}.$$

Or, les deux cercles se coupant par hypothèse, on a, à

la fois,

$$d^2 > (r - r')^2 \quad \text{et} \quad d^2 < (r + r')^2.$$

Donc, dans le premier cas, l'équation représente des hyperboles et, dans le deuxième, des ellipses.

1. L'hyperbole équilatère, dont les sommets sont A et B, est représentée par

$$y^2 - x^2 - b^2 = 0.$$

En retranchant membre à membre les équations

$$y^2 - x^2 - b^2 = 0$$

et

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 - \lambda x[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0,$$

et supprimant le facteur x, on a, pour l'équation de la corde commune CD, différente de AB,

$$2(x-a) - \lambda[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0.$$

Si l'on fait $y = 0$, on a

$$x - a = \frac{-\lambda r}{2 - \lambda\cos\alpha},$$

et, en remplaçant λ par $\frac{2d}{d\cos\alpha + r \mp r'}$, il vient

$$x - a = \frac{-dr}{r \mp r'}.$$

Premier cas : $x - a = \frac{-dr}{r - r'}$; la droite CD passe par le centre de similitude *externe* de deux cercles.

Deuxième cas : $x - a = \frac{-dr}{r + r'}$; CD passe par le centre de similitude *interne*.

2. *Lieu des centres des coniques représentées par l'équation*

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 - \lambda x[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0.$$

Les dérivées f'_x, f'_y du premier membre de cette équation étant

$$f'_x = 2(x-a) - \lambda[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] - \lambda x\cos\alpha,$$
$$f'_y = 2y - \lambda x \sin\alpha,$$

les coordonnées d'un centre satisfont aux équations

$$2(x-a) - \lambda[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] - \lambda x\cos\alpha = 0$$

ou

$$2(x-a) - \lambda[(2x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0$$

et

$$2y - \lambda x \sin\alpha = 0.$$

En remplaçant λ par $\frac{2d}{d\cos\alpha + r \mp r'}$, ces équations deviennent

$$(x-a)(d\cos\alpha + r \mp r') - d[(2x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0,$$
$$y(d\cos\alpha + r \mp r') - dx\sin\alpha = 0,$$

d'où

$$dx\cos\alpha + dy\sin\alpha = (x-a)(r \mp r') + dr$$

et

$$dy\cos\alpha - dx\sin\alpha = -y(r \mp r').$$

Élevant au carré et ajoutant membre à membre, on a

$$(x^2+y^2)d^2$$
$$= [(x-a)^2 + y^2](r \mp r')^2 + 2dr(r \mp r')(x-a) + d^2r^2.$$

Le lieu des centres se compose donc de deux cercles dont on peut séparer immédiatement les équations; le premier de ces deux cercles, correspondant à $r - r'$, est le lieu des centres des hyperboles, et le second, le lieu des centres des ellipses.

Dans l'équation précédente, les coefficients sont trop compliqués pour qu'on puisse déterminer rapidement le centre et le rayon de chacun des deux cercles. On les détermine facilement au moyen des considérations suivantes.

D'après les préliminaires, les tangentes aux points T,

T', T'' sont parallèles ; donc le milieu de TT' est le centre de l'*hyperbole* TT'AB, et le milieu de TT'' est le centre de l'ellipse TT''AB.

Or les coordonnées des points T, T', T'' sont respectivement

$$x_1 = a + r\cos\alpha,\quad y_1 = r\sin\alpha,$$
$$x_2 = -a' + r'\cos\alpha,\quad y_2 = r'\sin\alpha,$$
$$x_3 = -a' - r'\cos\alpha,\quad y_3 = -r'\sin\alpha.$$

Donc les coordonnées du milieu de TT' sont

$$x = \frac{a - a' + (r + r')\cos\alpha}{2},$$
$$y = \frac{(r + r')\sin}{2}.$$

Il s'ensuit

$$\left(x - \frac{a - a'}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r + r'}{2}\right)^2.$$

La circonférence représentée par cette dernière équation est le lieu géométrique des centres des hyperboles.

De même, les coordonnées du milieu de TT'' sont

$$x = \frac{(a - a') + (r - r')\cos\alpha}{2},$$
$$y = \frac{(r - r')\sin\alpha}{2},$$

d'où

$$\left(x - \frac{a - a'}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r - r'}{2}\right)^2,$$

équation d'une circonférence, lieu géométrique des centres des ellipses.

3. En multipliant par 2 l'équation de l'hyperbole variable, elle devient

$$2x^2(1 - \lambda\cos\alpha)$$
$$\quad - 2xy\lambda\sin\alpha + 2y^2 - 2x[2a - \lambda(a\cos\alpha + r)] - 2b^2 = 0,$$

de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + F = 0;$$

et l'équation de l'ensemble des deux asymptotes est alors, comme on sait,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + \frac{CD^2}{AC - B^2} = 0.$$

Les asymptotes coupent l'axe des y en des points dont les ordonnées s'obtiennent en faisant $x = 0$, dans cette dernière équation, ce qui donne

$$y^2 = \frac{D^2}{B^2 - AC}.$$

Mais

$$D^2 = [\lambda(a \cos\alpha + r) - 2a]^2$$

où, en remplaçant λ par sa valeur $\frac{2d}{d\cos\alpha + r - r'}$,

$$D^2 = \left[\frac{2d(a\cos\alpha + r)}{d\cos\alpha + r - r'} - 2a\right]^2 = \frac{4[dr - a(r - r')]^2}{(d\cos\alpha + r - r')^2}.$$

D'ailleurs, on a déjà calculé la valeur de

$$B^2 - AC = \frac{4[d^2 - (r - r')^2]}{(d\cos\alpha + r - r')^2};$$

donc

$$\frac{D^2}{B^2 - AC} = \frac{[dr - a(r - r')]^2}{d^2 - (r - r')^2}.$$

Cette valeur de $\frac{D^2}{B^2 - AC}$ est indépendante des variables α, λ; donc les asymptotes des hyperboles coupent, en deux points fixes, l'axe des y, qui est l'axe radical des deux cercles donnés.

Pour savoir quels sont ces deux points fixes, il suffit de considérer un cas particulier. Supposons, par exemple, que la droite TT' se confonde avec une des tangentes communes aux deux cercles. L'hyperbole TT'AB se réduit alors aux deux droites TT' et AB; par conséquent,

le point de rencontre de la tangente commune TT′ et de l'axe radical AB est un des deux points fixes. L'autre est le point de rencontre de la seconde tangente commune et de l'axe radical.

Note. — Des solutions de la même question nous ont été adressées par MM. Moret-Blanc; Ernest Malo, lieutenant du génie à Besançon; L. Blanchard, boursier à la Faculté de Clermont-Ferrand; Haure et A. Goulard, élèves à l'École Normale supérieure; Bertagne, élève du lycée de Marseille.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1852

(voir 1re série, t. XI, p. 324);

Par M. L. KIEN,
Élève du pensionnat Notre-Dame-du-Sacré-Cœur.

On donne une conique, ellipse, hyperbole ou parabole et deux axes fixes qui passent par un foyer et font entre eux un angle de grandeur déterminée. On fait rouler sur la conique une tangente, et par les points où cette droite rencontre dans chacune de ses positions les axes fixes on mène deux autres tangentes à la courbe; ces deux dernières tangentes se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique.

Nous prenons le foyer F considéré pour origine, l'axe focal pour axe des x et la perpendiculaire à cet axe focal, en F, pour axe des y. L'équation de la conique est

$$x^2 + y^2 - (ex + p)^2 = 0.$$

Soient $y - mx = 0$ l'équation de l'axe fixe $\overline{\mathrm{FA}}$, et $y - m'x = 0$ l'équation de l'axe fixe $\overline{\mathrm{FB}}$.

L'équation de la tangente mobile $\overline{AB}$ est

$$x(\cos\varphi - e) + y\sin\varphi - p = 0 \quad (^1).$$

L'équation générale des droites qui passent par A, intersection de $\overline{FA}$ et de la tangente $\overline{AB}$, est donc

$$x(\cos\varphi - e) + y\sin\varphi - p + \lambda(y - mx) = 0$$

ou

$$(k) \qquad (\cos\varphi - e - m\lambda)x + y(\lambda + \sin\varphi) - p = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que cette équation représente une tangente à la conique. Pour cela, on peut l'identifier avec l'équation $x(\cos\varphi' - e) + y\sin\varphi' - p = 0$ d'une tangente quelconque, puis éliminer φ' entre les deux équations de condition obtenues : on obtient ainsi la condition cherchée, qui est

$$\lambda^2(1 + m^2) + 2(\sin\varphi - m\cos\varphi)\lambda = 0.$$

La solution $\lambda = 0$ correspond à $\overline{AB}$; on la rejette et l'on a

$$\lambda = \frac{2(m\cos\varphi - \sin\varphi)}{1 + m^2}.$$

En transportant dans l'équation (k) cette valeur de λ, on obtient l'équation de la tangente autre que $\overline{AB}$, issue de A, à la conique. Cette équation est

$$(1) \quad \begin{cases} [(1 - m^2)\cos\varphi - e(1 + m^2) + 2m\sin\varphi]x \\ \quad + [2m\cos\varphi - (1 - m^2)\sin\varphi]y - p(1 + m^2) = 0. \end{cases}$$

L'équation de la tangente, autre que $\overline{AB}$, issue de B, intersection de $\overline{FB}$ et de $\overline{AB}$, sera de même

$$(2) \quad \begin{cases} [(1 - m'^2)\cos\varphi - e(1 + m'^2) + 2m'\sin\varphi]x \\ \quad + [2m'\cos\varphi - (1 - m'^2)\sin\varphi]y - p(1 + m'^2) = 0. \end{cases}$$

---

(1) φ est l'angle que le rayon vecteur mené du foyer au point de contact de la tangente AB fait avec l'axe des x.

L'équation du lieu résulte de l'élimination de φ entre les équations (1) et (2).

Si l'on ordonne ces équations par rapport à $\cos\varphi$ et à $\sin\varphi$, et si l'on résout ce système d'équations par rapport à $\cos\varphi$ et à $\sin\varphi$, on trouve

$$\cos\varphi = \frac{(ex+p)[(1-mm')x+(m'+m)y]}{(x^2+y^2)(1+mm')},$$
$$\sin\varphi = \frac{(ex+p)[(m'+m)x-(1-mm')y]}{(x^2+y^2)(1+mm')}.$$

Élevons au carré chacune de ces équations et additionnons; l'élimination est faite et, en chassant immédiatement le dénominateur commun, on obtient

$$(1+mm')^2(x^2+y^2)^2 = (ex+p)^2\{[(1-mm')x+(m'+m)y]^2 + [(m'+m)x-(1-mm')y]^2\}$$

ou simplement

$$(1+mm')^2(x^2+y^2)^2 = (ex+p)^2(x^2+y^2)[(1-mm')^2+(m'+m)^2].$$

Supprimant la solution évidemment étrangère $x^2+y^2=0$ qui nous donne l'origine, il nous vient

$$(3)\quad (1+mm')^2(x^2+y^2) = (ex+p)^2(1+m^2)(1+m'^2)$$

ou

$$(3')\quad x^2+y^2 - \frac{(1+m^2)(1+m'^2)}{(1+mm')^2}(ex+p)^2 = 0,$$

équation d'une conique homofocale à la conique donnée, et symétrique par rapport à l'axe des x.

On peut, comme cas particuliers, étudier celui où $m' = -m$, c'est-à-dire celui où l'axe focal $\overline{FX}$ est bissectrice de l'angle des droites fixes $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ données, et celui où l'angle de ces droites $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ est droit.

Dans le premier cas, $-m = m'$, l'équation (3') devient

$$x^2 + y^2 - \frac{(1+m^2)^2}{(1-m^2)^2}(ex+p)^2 = 0.$$

Elle ne présente, d'ailleurs, rien de particulier.

Dans le deuxième cas, on a $1 + mm' = 0$, et l'équation (3) devient

$$(ex+p)^2\left(\frac{m^2+1}{m}\right)^2 = 0$$

ou simplement

$$(ex+p)^2 = 0,$$

équation qui représente une droite double.

Cette droite a pour équation

$$ex + p = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b^2}{c} \quad \text{(elle est parallèle à FY).}$$

Dans le cas particulier du cercle, c'est-à-dire quand $e = 0$, l'équation (3') devient

$$x^2 + y^2 - \frac{(1+m^2)(1+m'^2)}{(1+mm')^2} r^2 = 0,$$

équation d'un cercle concentrique au premier, et si $m = -m'$, cette équation devient simplement

$$x^2 + y^2 - \frac{(1+m^2)^2}{(1-m^2)^2} r^2 = 0.$$

Le rayon du cercle est égal à

$$\frac{1+m^2}{1-m^2} r.$$

Enfin, si, dans ce dernier cas de $e = 0$, l'angle des droites $\overline{\text{FA}}$, $\overline{\text{FB}}$ était droit, c'est-à-dire si l'on avait

$$1 + mm' = 0$$

l'équation $(ex+p)^2 = 0$ obtenue précédemment de-

viendrait

$$r^2 = 0$$

et représenterait une droite rejetée à l'infini.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne.

La question proposée dans le numéro d'août sous le n° 1463 revient à démontrer ceci : R étant le rayon de courbure au point P, h la distance du centre O à la tangente en ce point, d le demi-diamètre conjugué de la direction OP, on a

$$d^2 = R.h.$$

Or, cette formule n'est autre que la traduction d'un théorème de M. Chasles, auquel j'ai été conduit incidemment dans le paragraphe II de ma Note, *Applications de Géométrie cinématique plane* (*Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 264), paragraphe intitulé : *Sur le centre de courbure de l'ellipse*. Au surplus, je vais rappeler ce théorème :

Considérons, sur la normale à l'ellipse menée par le point P, *le centre de courbure* Q, *le pied* H *de la perpendiculaire abaissée du centre* O *et les points* A *et* B *tels que* PA = PB = d; *les points* Q *et* H *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B, *ou, puisque* P *est le milieu de* AB,

$$d^2 = R.h.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie, comprenant l'exposé des méthodes géométriques et deux mille questions résolues; par *F. I. C.* (Tours, A. Mame et fils).

Ces *Exercices de Géométrie* sont le complément des *Éléments de Géométrie* du même auteur; ils renferment des théorèmes à démontrer, des lieux géométriques à trouver et des problèmes à résoudre.

L'Ouvrage comprend deux Parties bien distinctes. La première traite des *Méthodes,* la deuxième est proprement le *Recueil d'exercices.*

« Les Méthodes constituent la partie la plus importante de tout l'Ouvrage, comme elles en sont d'ailleurs la plus originale. Tout *professeur,* tout élève sérieux *devrait posséder parfaitement ce complément de Géométrie;* car l'exposition des méthodes fait naître et développe les idées générales; elle permet de rattacher des milliers d'exercices variés à quelques types principaux, que l'on retient sans peine et que l'on applique avec facilité (1). »

Afin d'obliger le lecteur à s'assimiler cette première Partie, l'auteur l'avertit que les questions données en exemples dans les *Méthodes* sont prises parmi celles proposées aux *Éléments;* « par ce moyen, dit-il, on trouve non seulement la démonstration ou la solution cherchée, mais on voit à quel genre il est possible de la rattacher, et quels sont les Exercices que l'on pourrait traiter d'une manière analogue. »

Nous n'hésitons pas à le dire, cette première Partie de l'Ouvrage est vraiment neuve et intéressante, elle suppose que l'auteur se tient au courant de tout ce qui a été écrit jusqu'à nos jours sur la Géométrie.

Il aurait pu écrire de lui ce que dit M. H. Sonnet dans la préface de la deuxième édition de ses *Premiers éléments de*

(1) *Exercices de Géométrie,* p. II.

Calcul infinitésimal. « Il a fallu faire abnégation d'amour-propre pour nous réduire au rôle très secondaire que nous avons accepté. » On en est, d'ailleurs, assuré quand on lit, p. 220 : « Les méthodes données précédemment pour étudier les questions relatives à la *Géométrie de position* suffisent amplement pour traiter les nombreux exercices qui sont énoncés dans les *Éléments;* et néanmoins c'est avec un vif sentiment de peine que nous avons dû renoncer à exposer d'une manière élémentaire les principales *Méthodes modernes.* »

Nous partageons ce sentiment de l'auteur, et nous ne voyons pas pourquoi il ne nous donnerait pas un Traité élémentaire de Géométrie moderne; ce serait un Ouvrage d'actualité, car les méthodes nouvelles tendent à entrer dans les programmes officiels.

Nous nous bornerons à donner les titres des sujets traités dans cette première Partie.

Analyse et synthèse. — Lieux géométriques et enveloppes. — Emploi des figures auxiliaires. — Transformation des figures. — Discussion et extension. — Méthode algébrique. — Maxima et minima.

Nous appellerons toutefois l'attention du lecteur sur cette dernière méthode; l'emploi de la *tangente* pour la résolution de cette sorte de questions n'avait pas encore, croyons-nous, été appliqué d'une façon aussi méthodique et aussi heureuse.

La seconde Partie comprend les *Exercices* proprement dits. Le classement des questions a été l'objet d'un soin tout particulier. « Plusieurs questions réputées difficiles ont trouvé place dans ce recueil, parce que l'emploi judicieux des *Méthodes* conduit à des démonstrations ou à des solutions remarquables par leur simplicité ([1]). »

L'auteur ne s'est pas borné aux questions que l'on rencontre partout, quiconque lira cet Ouvrage s'en rendra aisément compte.

Nous ne résistons pas au plaisir de reproduire ce passage de l'avant-propos :

« Nous avons cité les *grands géomètres,* parce que leur illustre nom relève, ennoblit en quelque sorte les questions

---

([1]) *Exercices de Géométrie,* p. v.

qu'ils ont traitées; nous regardons, d'ailleurs, comme un devoir de reconnaissance envers ces illustres mathématiciens de rappeler leur souvenir à tous ceux qui bénéficient de leurs travaux.

» Beaucoup de savants moins célèbres, sans nul doute, qu'Archimède, Pascal, Descartes, Newton, Desargues, Poncelet, Chasles, etc., méritent d'autant plus d'être mentionnés qu'ils trouvent rarement place dans les dictionnaires bibliographiques; en effet, la plupart de ces Ouvrages, dus à des hommes de lettres, ne veulent point oublier le moindre romancier, le moindre utopiste de quelque renom, mais ils ne se préoccupent pas au même degré de ceux qui ont voué leur existence aux laborieuses recherches mathématiques.

» Enfin, à côté des plus grands noms, se trouvent aussi les noms, parfois très modestes, de certains auteurs que nous avons néanmoins consultés avec profit; nous n'avons pas hésité à mettre ces hommes estimables dans le cortège des plus illustres géomètres, et nous pouvons même dire que, si nous sommes fiers de citer les plus grands mathématiciens, nous sommes encore plus heureux de rendre justice à ceux que la gloire ne viendra jamais couronner. »

L'Ouvrage se termine par un *Index biographique* et un *Index bibliographique* destinés à faciliter les recherches et à rappeler les sources où l'auteur a puisé.

H. Faure,
Chef d'escadron d'Artillerie en retraite.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du globe, donnant le tableau permanent des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'Univers, publiée par *Camille Flammarion,* avec le concours des principaux astronomes français et étrangers. — Abonnements pour un an : Paris : 12fr; Départements : 13fr; Étranger : 14 fr.; Prix du numéro : 1fr,20. — La Revue paraît le 1er de

chaque mois. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire de l'Observatoire de Paris, quai des Augustins, 55.

Sommaire du n° 8 (aout 1883).

Photographie directe de la nébuleuse d'Orion (1 figure). — *Les grandes marées au mont Saint-Michel;* par M. *C. Flammarion* (2 figures). — *Disparition de la tache rouge de Jupiter;* par M. *Riccò*, astronome à l'Observatoire de Palerme (1 figure). — *Les variations périodiques de la température* dans le cours de l'année; par M. *Roche,* professeur au lycée de Montpellier (1 figure). — *La formation du système solaire,* d'après Laplace; par M. *Philippe Gérigny.* — *La réforme du calendrier;* par M. *E. Millosevich,* astronome à l'Observatoire de Rome. — *Académie des Sciences :* Sur les mouvements du sol de l'Observatoire de Neuchâtel; par M. *Faye.* — *Nouvelles de la Science.* Variétés : L'éclipse totale du Soleil du 6 mai (1 figure). Taches solaires visibles à l'œil nu. Bolides remarquables (2 figures). La grande comète de 1882. Souvenir du passage de Vénus. — *Observations astronomiques* (2 figures), et *Études sélénographiques* (2 figures); par M. *Gérigny.*

Sommaire du n° 9 (septembre 1883).

Le tremblement de terre d'Ischia; par M. *C. Flammarion* (3 figures). — *L'Observatoire du Pic du Midi;* par M. le Contre-Amiral *Mouchez,* Directeur de l'Observatoire de Paris (1 figure). — *Taches solaires et protubérances;* par M. *Tacchini,* Directeur de l'Observatoire de Rome. — *Nouvelles mesures des anneaux de Saturne;* par M. *C. Detaille* (4 figures). — *Le Vésuve et Ischia;* par M. *R.-A. Proctor.* — *Académie des Sciences :* Perturbations solaires nouvellement observées; par M. *L. Thollon* (1 figure). — *Nouvelles de la Science.* Variétés : La Catastrophe d'Ischia. Éruptions et taches solaires. Observatoire de Paris. Explosions solaires. Exemple à suivre. — *Observations astronomiques* (2 figures) et *Études sélénographiques* (1 figure); par M. *Gérigny.*

Sommaire du n° 10 (octobre 1883).

Curieux phénomènes météorologiques; par M. *C. Flam-*

marion (3 figures). — *Les mouvements sidéraux observés au spectroscope,* par M. *L. Thollon,* astronome à l'Observatoire de Nice (3 figures). — *L'atmosphère de Vénus* (3 figures). — *Choix d'un premier méridien;* par M. *Charles Lemaire Teste,* Observatoire de Rio-Janeiro. — *Les taches du Soleil,* par M. le colonel *Gazan.* — *Académie des Sciences.* Sur la possibilité d'accroître dans une grande proportion la précision des observations des éclipses de Jupiter; par M. *A. Cornu* (1 figure). — *Nouvelles de la Science.* Variétés : Le cataclysme de Java (1 figure). Nouvelle comète : retour de celle de 1882. Phases de Vénus observées à l'œil nu. Almanach astronomique Flammarion. Taches solaires visibles à l'œil nu. — *Observations astronomiques* (2 figures) et *Études sélénographiques* (1 figure), par M. *Gérigny.*

2. La Platinotypie. Exposé théorique et pratique d'un procédé photographique aux sels de platine, permettant d'obtenir rapidement des épreuves inaltérables; par MM. *Pizzighelli* et *Hübl;* ouvrage honoré de la médaille d'or Voigtländer et édité par les soins de la Société photographique de Vienne. Traduit de l'allemand par M. *Henry Gauthier-Villars.* In-8°, avec figures et une belle platinotypie hors texte. 3 fr. 50.

Tirages a part.

Sulle Funzioni interpolari, di *G. Peano,* assistente di Calcolo infinitesimale presso la R. Università di Torino.

Sull'integrabilità delle Funzioni, di *G. Peano.* (Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.*) Torino, Ermanno Loescher, librario della R. Accademia delle Scienze. (1883.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1462

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. N. GOFFART.

Dans un triangle ABC *on a pris le point* C′ *sur* AB *et* B′ *sur* AC, *tels que l'angle* C′CB *soit égal à* $\frac{C}{m}$ *et que l'angle* B′BC *soit égal à* $\frac{B}{m}$; *démontrer que, si*

$$CC' = BB',$$

le triangle ABC *est isoscèle.* (EMILE LEMOINE.)

Dans les triangles BB′C et CC′B, on a

$$\frac{BB'}{\sin C} = \frac{BC}{\sin BB'C} \quad \text{et} \quad \frac{CC'}{\sin B} = \frac{BC}{\sin CC'B};$$

d'où, à cause de BB′ = CC′,

$$\frac{\sin C}{\sin BB'C} = \frac{\sin B}{\sin CC'B};$$

ou bien encore

$$(1) \qquad \frac{\sin C}{\sin\left(C + \frac{B}{m}\right)} = \frac{\sin B}{\sin\left(B + \frac{C}{m}\right)},$$

équation à laquelle on satisfait en posant B = C; ce qui démontre la proposition, attendu que la solution B = C est unique.

En effet, on peut remplacer l'équation (1) par une nouvelle équation qu'on obtient en ajoutant et retranchant terme à terme les rapports et transformant ensuite les sommes et les différences des sinus en pro-

duits; on a ainsi

$$(2)\qquad \frac{\tang\frac{B-C}{2}}{\tang\frac{m-1}{m}\frac{B-C}{2}}=\frac{\tang\frac{B+C}{2}}{\tang\frac{m+1}{m}\frac{B+C}{2}},$$

en posant $B > C$ et $m > 1$.

On a évidemment

$$\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\tang\frac{B-C}{2}>\tang\frac{m-1}{m}\frac{B-C}{2};$$

c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (2) est >1.

D'autre part, quand $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ varie entre 0 et $\frac{m}{m+1}\frac{\pi}{2}$, on a $\tang\frac{B+C}{2}<\tang\frac{m+1}{m}\frac{B+C}{2}$, et le second membre reste <1. Si $\frac{B+C}{2}$ varie de $\frac{m}{m+1}\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$,

$$\tang\frac{m+1}{m}\frac{B+C}{2}$$

est négatif, $\tang\frac{B+C}{2}$ positif, et le second membre de l'équation (2) est négatif. Donc aucune valeur de $B-C$ autre que zéro ne satisfait à l'équation (2); par conséquent $B=C$. C. Q. F. D.

Note. — M. Moret-Blanc a donné de cette proposition une démonstration géométrique.

Question 1465

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. MORET-BLANC.

De deux points situés sur l'axe des x et équidistants de l'origine, on mène des tangentes à la conique re-

présentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x = 0;$$

prouver que les points d'intersection de ces tangentes sont sur la conique

$$by^2 + hxy - x = 0.$$

(Wolstenholme.)

L'équation quadratique des tangentes menées à la conique, du point $x = \alpha, y = 0$, est

$$(a\alpha^2 - 2\alpha)(ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x) - [(a\alpha - 1)x + h\alpha y - \alpha]^2 = 0$$

ou, en développant, réduisant et ordonnant par rapport à α,

$$[(h^2 - ab)y^2 - 2hy + 1]\alpha^2 + 2(by^2 + hxy - x)\alpha + x^2 = 0,$$

et, pour le point $x = -\alpha, y = 0$, on aura

$$[(h^2 - ab)y^2 - 2hy + 1]\alpha^2 - 2(by^2 + hxy - x)\alpha + x^2 = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente pour éliminer α, il vient

$$by^2 + hxy - x = 0,$$

équation du lieu des points d'intersection des deux systèmes de tangentes

Note. — La même question a été résolue par M. Arnold Droz, professeur au gymnase de Porréntruy.

Question 1468

(voir 3e série, t. II. p. 384);

PAR M. MORET-BLANC.

Soient, sur le cadran d'une montre à l'instant θ, OA *la direction de la petite aiguille*, OB *celle de la grande; déterminer* θ *de façon que, lorsque, après un certain temps, la petite aiguille sera venue sur la direc-*

tion OB, *la grande aiguille soit précisément dirigée suivant* OA. *Quelles sont toutes les heures comprises dans un cycle complet, de midi à minuit, qui répondent à la question?* (D'OCAGNE.)

Soient h le nombre d'heures et m le nombre de minutes dont se compose le temps θ; h est entier, mais m peut être fractionnaire.

Je compterai les distances sur la circonférence du cadran à partir de la position des aiguilles à midi, que je désigne par O', en prenant pour unité l'une des soixante divisions du cadran.

Cela posé,

$$O'B = m, \quad O'A = 5h + \frac{m}{12},$$

d'où

$$AB = \tfrac{11}{12}m - 5h.$$

Pendant que la petite aiguille va de A en B, la grande parcourt un nombre de divisions égal à

$$11m - 60h,$$

et, si elle est venue en A, ce nombre est aussi égal à

$$60 - \tfrac{11}{12}m + 5h;$$

donc

$$11m - 60h = 60 - \tfrac{11}{12}m + 5h,$$

$$\frac{11.13}{12}m = 60 + 65h,$$

$$m = \frac{720 + 780h}{143} = 5 + \frac{5}{143} + \left(5 + \frac{65}{143}\right)h.$$

En donnant à h successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, on aura les valeurs correspondantes de m, ce qui fera connaître les valeurs de θ, qui forment une progression arithmétique dont la raison est

$$1^h 5^m \tfrac{65}{143}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 0^h.\ 5^m.\tfrac{5}{143},\\
\theta_2 &= 1.10.\tfrac{70}{143},\\
\theta_3 &= 2.15.\tfrac{135}{143},\\
\theta_4 &= 3.21.\tfrac{57}{143},\\
\theta_5 &= 4.26.\tfrac{122}{143},\\
\theta_6 &= 5.32.\tfrac{44}{143},\\
\theta_7 &= 6.37.\tfrac{109}{143},\\
\theta_8 &= 7.43.\tfrac{31}{143},\\
\theta_9 &= 8.48.\tfrac{96}{143},\\
\theta_{10} &= 9.54.\tfrac{18}{143},\\
\theta_{11} &= 10.59.\tfrac{83}{143},
\end{aligned}$$

après quoi on retrouverait la première position.

Note. — La même question a été résolue par un Anonyme, en Danemark.

Question 1472

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 432);

PAR M. ÉMILE LEMOINE.

Soient O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC *et* i *le point d'intersection des trois hauteurs du triangle; prouver :*

1° *Que la distance de* O *à l'un quelconque des côtés est la moitié de la distance de* i *au sommet opposé à ce côté; et de là*

2° *Que* O*i est la résultante des trois forces égales* OA, OB, OC ([1]). (SYLVESTER, F. R. S.)

Première partie. — Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés BC, AC, AB.

([1]) La première partie de cette proposition est, depuis longtemps, connue; la seconde partie, qui résulte simplement de la première, n'avait pas été remarquée. (G.)

Les triangles OA_1B_1, iAB sont semblables comme ayant les côtés parallèles. Mais

$$AB = 2A_1B_1,$$

donc

$$iA = 2OA_1.$$

C. Q. F. D.

Deuxième partie. — Soit A' le symétrique de O, par rapport à BC; OA' est la résultante de OB, OC, puisque le quadrilatère $OBCA'$ est un losange.

Cela posé

$$OA' = 2OA_1 = iA;$$

donc le quadrilatère $A'OAi$ est un parallélogramme, et, par conséquent, Oi est la résultante de OA' et de OA, c'est-à-dire de OB, OC, OA. C. Q. F. D.

On peut remarquer qu'on a le théorème suivant, beaucoup plus général :

Soient O *un point quelconque du plan d'un triangle* ABC *et* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés* BC, AC, AB *du triangle. Si par les sommets* A, B, C *on mène, respectivement, des parallèles à* OA_1, OB_1, OC_1, *ces trois droites se rencontrent en un point* i, *et* Oi *est la résultante des droites* OA, OB, OC (1).

Note. — La question 1472 a été résolue par MM. J. Rénoy; Goffart; Moret-Blanc; d'Ocagne, élève ingénieur des Ponts et Chaussées; Romero, à Madrid; A. Droz, à Chaux-de-Fonds; Victor de Strékalof, à Saint-Pétersbourg; L. B., à Angers.

---

(1) Ce serait encore vrai si le point O n'appartenait pas au plan du triangle ABC, car, quelle que soit la position de ce point dans l'espace, les droites menées de A, B, C parallèlement à OA_1, OB_1, OC_1 se rencontrent en un point i; la droite Oi passe par le centre M des moyennes distances des trois points A, B, C; et, de plus, $Oi = OM \times 3$.

Il s'ensuit que Oi est résultante de OA, OB, OC d'après cette proposition générale, que la résultante d'un nombre quelconque, n, de forces OA, OB, OC, OD, ... passe par le centre des moyennes distances, M, des points A, B, C, D, ... et est égale à $OM \times n$. (G.)

Question 1474

(voir 3e série, t. II, p. 432);

PAR UN ANONYME.

ABC *est un triangle rectangle en* A. *D'un point quelconque* M *pris sur le côté* AB *on abaisse sur la hauteur* AH *la perpendiculaire* MP; *par le point* P *on élève à la droite* CP *la perpendiculaire* PQ *qui coupe* AB *prolongé au point* Q.

Démontrer que AQ = BM.

(D'OCAGNE.)

Les angles CPQ, CAQ étant droits, le quadrilatère CPAQ est inscriptible [1] : donc l'angle

$$\widehat{ACQ} = \widehat{APQ}.$$

Mais l'angle APQ, étant évidemment le complément de CPH, est égal à PCH. Donc $\widehat{ACQ} = \widehat{PCH}$. Par conséquent, les triangles rectangles ACQ, PCH sont semblables; et l'on a

$$\frac{AQ}{PH} = \frac{AC}{CH} = \frac{AB}{AH},$$

d'où

$$AQ = AB \times \frac{PH}{AH} = AB \times \frac{BM}{AB} = BM.$$

C. Q. F. D.

Note. — Même solution de M. Goffart.

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTIONS.

1481. Résoudre les équations

(1) $$x^4 - x^3\sqrt{15} + 4x^2 - 1 = 0,$$

(2) $$x^4 - x^3\sqrt{3} - 2x^2 + 2x\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Interpréter leurs racines. (GOFFART.)

1482. OA et OB étant deux droites fixes quelconques, on considère une ellipse variable, tangente à OA au point O, ayant une courbure constante en ce point et dont un foyer reste constamment sur OB. Démontrer que le grand axe de cette ellipse passe par un point fixe. (D'OCAGNE.)

1483. Soient V le volume d'un tétraèdre et V_1 le volume du tétraèdre qu'on obtient en menant par un point quelconque des droites égales et parallèles aux plus courtes distances α, β, γ des arêtes opposées du tétraèdre donné; on a

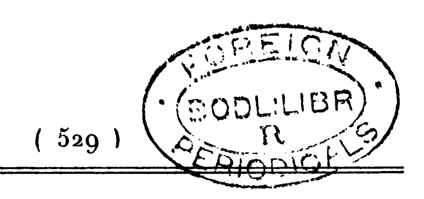
$$12VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

(GENTY.)

Note. — La question 1401 a été résolue par M. Moret-Blanc; et la question 1466, par MM. Droz et de Strékalof.

RECTIFICATION.

Même tome, page 479, ligne 8 en remontant : « il y a exception pour $x = 1$, et pour $x = 2(4n + 1)$ », lisez : il y a exception pour $x = 1$, et pour $x = 4n + 1$.



SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS DE SINnx ET DE COSnx;

PAR M. E. CATALAN ([1]).

Les valeurs de $\sin nx$ et de $\cos nx$, ordonnées suivant les puissances de $\sin x$ ou de $\cos x$, sont connues depuis longtemps. Elles ont été démontrées par Lagrange et Cauchy, puis par MM. Baehr, Villarceau et Ronkar ([2]). Mais personne, je le crois, n'a remarqué la notable simplification que subissent les formules, quand on y introduit $2\sin x$, $2\cos x$ au lieu de $\sin x$, $\cos x$. Afin d'épargner aux lecteurs des *Nouvelles Annales* l'ennui de consulter divers Ouvrages peu répandus, je reproduis, en la modifiant un peu, la remarquable méthode employée par M. Yvon Villarceau ([3]).

I. — DÉVELOPPEMENTS DE $\sin nx$.

1. Le calcul direct de $\sin 2x$, $\sin 4x$, $\sin 6x$, ..., conduit à supposer

$$(1)\qquad (-1)^{\frac{n}{2}-1}\sin nx = \cos x \sum A_i (2\sin x)^{n-i}$$

(n pair, i impair).

Prenant les dérivées des deux membres, on trouve

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{n}{2}-1} n\cos nx &= \sum 2(n-i)A_i(2\sin x)^{n-i-1} \\ &\quad - \sum \frac{1}{2}(n-i+1)A_i(2\sin x)^{n-i+1}; \end{aligned}\right.$$

([1]) Cette Note ne fait pas double emploi avec celle qui a paru dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 100.

([2]) *Loc. cit.*, p. 101 et 124.

([3]) *Comptes rendus*, t. LXXXII.

puis, en prenant de nouveau les dérivées,

$$(3)\quad \begin{cases} -(-1)^{\frac{n}{2}-1} n^2 \sin nx = \cos x \sum 4(n-i)(n-i-1)\,A_i(2\sin x)^{n-i-2} \\ \qquad\qquad - \cos x \sum (n-i+i)^2\, A_i(2\sin x)^{n-i}. \end{cases}$$

La combinaison des égalités (1), (3) donne, après suppression du facteur $\cos x$,

$$(4)\quad \begin{cases} 0 = \sum (2n-i+1)(i-1)\,A_i(2\sin x)^{n-i} \\ \quad + \sum 4(n-i)(n-i-1)\,A_i(2\sin x)^{n-i-2}. \end{cases}$$

Dans le second membre, le coefficient de $(2\sin x)^{n-i}$ est

$$(2n-i+1)(i-1)\,A_i + 4(n-i+2)(n-i+1)\,A_{i-2}.$$

Dans le premier membre, ce coefficient est nul; donc

$$(5)\qquad A_i = -\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{\left(n-\frac{i-1}{2}\right)\left(\frac{i-1}{2}\right)}\,A_{i-2}.$$

On reconnaît aisément que $A_i = 1$ (¹). Par suite,

$$A_3 = -\frac{n-2}{1},$$

$$A_5 = +\frac{(n-3)(n-4)}{1.2},$$

$$A_7 = -\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3},$$

...............................;

(¹) En effet, de la formule de Moivre, on tire

$$\frac{\sin nx}{\cos x} = \frac{n}{1}\cos^{n-2}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-4}\sin^3 x + \ldots,$$

ou

$$\frac{\sin nx}{\cos x} = \frac{n}{1}(1-\sin^2 x)^{\frac{n}{2}-1}\sin x$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(1-\sin^2 x^{\frac{n}{2}}\right)\sin^3 x + \ldots.$$

Or, dans le second membre, le coefficient de $\sin^{n-1} x$ est, en valeur absolue,

$$C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \ldots = 2^{n-1},$$

et, en général,

$$(6)\qquad A_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2},\frac{i-1}{2}}.$$

La première des formules cherchées est donc

$$(A)\quad (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{\sin nx}{\cos x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2},\frac{i-1}{2}} (2\sin x)^{n-i}$$

(n pair, i impair).

2. Pour former la seconde, il suffit de remplacer x par $\frac{\pi}{2} - x$. On obtient ainsi

$$(B)\qquad \frac{\sin nx}{\sin x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2},\frac{i-1}{2}} (2\cos x)^{n-i}$$

(n pair, i impair) (¹).

II. — Développements de $\cos nx$.

3. Si l'on pose

$$(7)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos nx = \cos x \sum B_i (2\sin x)^{n-i}$$

(n pair, i impair), il est clair, sans nouveaux calculs, que la relation entre B_i et B_{i-2} sera, sauf le changement de lettre, la formule (5), savoir

$$(8)\qquad B_i = -\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{\left(n - \frac{i-1}{2}\right)\left(\frac{i-1}{2}\right)} B_{i-2}.$$

(¹) 1° Si $n = 4\mu$, le changement indiqué donne

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = -\sin 4\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(-nx) = \sin nx.$$

2° Si $n = 4\mu + 2$:

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = \sin(4\mu+2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi - nx) = \sin nx.$$

Et comme $B_1 = 1 = A_1$,

(9) $$B_i = A_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}}.$$

Le développement demandé est donc

(C) $$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos nx}{\cos x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2\sin x)^{n-i}$$

(n impair, i impair).

4. Le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$ donne ensuite

(D) $$\frac{\sin nx}{\sin x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2\cos x)^{n-i}$$

(n impair, i impair).

5. Lorsque n est pair, $\cos nx$ est une fonction paire de $\cos x$. On trouve, par un calcul semblable aux précédents,

(E) $$\cos nx = \sum (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{n}{2n-k} C_{n-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}} (2\cos x)^{n-k}$$

(n pair, k pair).

III. — Applications.

6. Si l'on suppose, successivement, $n = 4, 5, 6, 7$, on obtient les valeurs connues (¹)

$$-\frac{\sin 4x}{\cos x} = (2\sin x)^3 - 2(2\sin x),$$

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = (2\cos x)^3 - 2(2\cos x),$$

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = (2\sin x)^4 - 3(2\sin x)^2 + 1,$$

(¹) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 103 et 104. On a imprimé, fautivement, $17\cos^2 x$, au lieu de $12\cos^2 x$.

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = (2\cos x)^4 - 3(2\cos x)^2 + 1,$$

$$\frac{\sin 6x}{\cos x} = (2\sin x)^5 - 4(2\sin x)^3 + 3(2\sin x),$$

$$\frac{\sin 6x}{\sin x} = (2\cos x)^5 - 4(2\cos x)^3 + 3(2\cos x),$$

$$-\frac{\cos 7x}{\cos x} = (2\sin x)^6 - 5(2\sin x)^4 + 6(2\sin x)^2 - 1,$$

$$-\frac{\sin 7x}{\sin x} = (2\cos x)^6 - 5(2\cos x)^4 + 6(2\cos x)^2 - 1,$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,$$

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1.$$

IV. — Remarques.

7. La formule (D), développée, devient

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = (2\cos x)^{n-1} - C_{n-2,1}(2\cos x)^{n-3} + C_{n-3,2}(2\cos x)^{n-5} - C_{n-4,3}(2\cos x)^{n-7} + \ldots.$$

Quand on opère d'une manière un peu différente de celle qui vient d'être indiquée, on trouve [1]

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x} = (2\sin x)^{n-1} - \frac{n}{1}(2\sin x)^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\sin x)^{n-5} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\sin x)^{n-7} + \ldots.$$

Par conséquent, on a cette identité, dans laquelle n est *impair* :

$$(\mathrm{F})\left\{\begin{aligned} &(2\cos x)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos x)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2\cos x)^{n-5} - \ldots \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big[(2\sin x)^{n-1} - \frac{n}{1}(2\sin x)^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\sin x)^{n-5} \\ &\qquad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\sin x)^{n-7} - \ldots\Big].\end{aligned}\right.$$

---

(1) *Loc. cit.*

8. Dans la même relation (D), faisons tendre x vers zéro : la limite du premier membre est n. De là cette sommation, assez remarquable [1] :

$$(G)\quad 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} - 2^{n-7}C_{n-4,3} + \ldots = n.$$

9. Si tous les termes sont pris positivement, le résultat est beaucoup plus compliqué : je trouve

$$(H)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2^{n-1} + 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} + \ldots \\ & \quad = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \right.$$

10. Dans l'égalité (F), le dernier terme du premier membre est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\cos x)^0$.

Par conséquent, si l'on fait $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(I)\quad \frac{2^{n-1}-1}{n} = 2^{n-3} - \frac{n-3}{2}2^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.3}2^{n-7} - \ldots.$$

11. Supposons que n soit un nombre premier. Alors, en vertu du théorème de Fermat, le premier membre est un nombre entier. De plus, comme on le reconnaît sans peine [2], *tous les coefficients,* dans le second membre, *sont des nombres entiers.* La relation (I) donne donc, pour ainsi dire, une *décomposition, en parties entières, du nombre entier* $\frac{2^{n-1}-1}{n}$.

12. Pour trouver une propriété plus générale, il suffit de recourir à la relation (E), en y faisant $x = \frac{\pi}{3}$.

---

(1) Elle n'exige pas que n soit *impair.*

(2) Je crois me rappeler que M. Stern a donné des formules analogues à celle-ci.

Elle se réduit à

$$\cos\frac{n\pi}{3}=\sum(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{n}{2n-k}C_{n-\frac{k}{2},\frac{k}{2}},$$

ou encore, à (¹)

$$(K)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n-3}{2}-\dfrac{(n-4)(n-5)}{2.3}+\dfrac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}-\ldots\\[2ex] \qquad=1-\dfrac{1-2\cos\dfrac{n\pi}{3}}{n}.\end{array}\right.$$

Si, par exemple, $n=8$, on a

$$\frac{5}{2}-\frac{4.3}{2.3}+\frac{3.2.1}{2.3.4}=1+\frac{2}{8}.$$

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE PAR FORMULES DIRECTES;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. Proposons-nous de résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée

$$(n+4)x^2-ny^2=4,$$

dans laquelle n est un entier >0, ou <-4.

Cette équation est de celles où il suffit de connaître une seule solution, pour en déduire aussitôt une autre,

---

(¹) Par exemple, en appliquant ce théorème :

Si a, b sont premiers entre eux, la fraction

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a\times 1.2.3\ldots b}$$

se réduit à un nombre entier (*Mélanges mathématiques*, p. 129).

et par suite, de proche en proche, une infinité d'autres. Les formules à employer à cet effet sont même, dans notre cas, beaucoup plus simples que celles qui se rapportent à l'équation de Pell, et aux équations quadratiques analogues, traitées dans les Ouvrages classiques.

Soit, en effet,

$$(n+4)\alpha^2 - n\beta^2 = 4$$

la solution connue. On reconnaîtra immédiatement, par la substitution directe, que l'on arrive à une seconde solution par l'emploi des formules

$$x = \tfrac{1}{2}[(n+2)\alpha + n\beta],$$
$$y = \tfrac{1}{2}[(n+4)\alpha + (n+2)\beta],$$

où l'on prendra α et β positifs, pour être assuré d'avoir

$$x > \alpha, \quad y > \beta.$$

D'après cela, la solution initiale

$$(n+4).1^2 - n.1^2 = 4,$$

insignifiante en apparence, suffit pour amener le résultat

$$(n+4)(n+1)^2 - n(n+3)^2 = 4,$$

suivi d'une infinité d'autres identités résolvant l'équation.

Ayant ainsi calculé les premières solutions, écrivons, par ordre, les valeurs successives des indéterminées, comme il suit :

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1 + n,$$
$$x_3 = 1 + 3n + n^2,$$
$$x_4 = 1 + 6n + 5n^2 + n^3,$$
$$x_5 = 1 + 10n + 15n^2 + 7n^3 + n^4,$$
$$x_6 = 1 + 15n + 35n^2 + 28n^3 + 9n^4 + n^5,$$

.................................;

$$y_1 = 1,$$
$$y_2 = 3 + n,$$
$$y_3 = 5 + 5n + n^2,$$
$$y_4 = 7 + 14n + 7n^2 + n^3,$$
$$y_5 = 9 + 30n + 27n^2 + 9n^3 + n^4,$$
$$y_6 = 11 + 55n + 77n^2 + 44n^3 + 11n^4 + n^5,$$
....

La loi que suivent les valeurs de x est facile à apercevoir. On voit effectivement que, le terme indépendant de x étant partout égal à l'unité, les coefficients de n, à partir de x_2, représentent la suite des nombres triangulaires; les coefficients de n^2, à partir de x_3, sont donnés par la suite des nombres figurés du quatrième ordre, les coefficients de n^3, à partir de x_4, sont donnés par la suite des nombres figurés du sixième ordre, ... D'après cela, la valeur générale de x se trouvera exprimée par

$$x_a = 1 + \frac{(a-1)a}{2} n + \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2.3.4} n^2$$
$$+ \frac{(a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)}{2.3.4.5.6} n^3 + \ldots + n^{a-1},$$

le coefficient de n^{a-k} étant

$$\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(2n-k-1)}{2.3.4\ldots(2n-2k)};$$

c'est ce qu'il est facile de vérifier après avoir assigné l'expression de y_a.

Pour obtenir y_a, nous ferons $n = -(n'+4)$, par où la proposée se change en

$$(n'+4)y^2 - n'x^2 = 4,$$

équation de même forme, à l'échange près des lettres x, y entre elles. Les valeurs de y seront donc, étant ad-

mis le développement ci-dessus de x_a,

$$y_1 = 1,$$
$$y_2 = 1 + \frac{1.2}{2} n',$$
$$y_3 = 1 + \frac{2.3}{2} n' + \frac{1.2.3.4}{2.3.4} n'^2,$$
$$y_4 = 1 + \frac{3.4}{2} n' + \frac{2.3.4.5}{2.3.4} n'^2 + n'^3,$$
$$y_5 = 1 + \frac{4.5}{2} n' + \frac{3.4.5.6}{2.3.4} n'^2 + \frac{2.3.4.5.6.7}{2.3.4.5.6} n'^3 + n'^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_a = 1 + \frac{(a-1)a}{2} n' + \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2.3.4} n'^2$$
$$+ \frac{(a-3)(a-2)\ldots(a+2)}{2.3.4.5.6} n'^3 + \ldots + n'^{a-1},$$

où l'on fera partout $n' = -(4+n)$. On retrouve par là les valeurs de y écrites plus haut, à cela près que les expressions y_a d'indice pair se présentent ici sous forme négative, ce qui n'altère pas le résultat de la substitution dans la proposée.

Les expressions générales de x_a et y_a, qui viennent d'être écrites, satisfont aux relations fondamentales

$$x_a = \tfrac{1}{2}[(n+2)x_{a-1} + ny_{a-1}],$$
$$y_a = \tfrac{1}{2}[(n+4)x_{a-1} + (n+2)y_{a-1}],$$

d'où résulte que, si les valeurs positives x_{a-1}, y_{a-1} vérifient la proposée, les valeurs $x_a > x_{a-1}, y_a > y_{a-1}$ la vérifient aussi. La loi que suivent les valeurs successives de x et y, énoncée ci-dessus par induction, se trouve donc démontrée.

On peut aussi observer que l'on a

$$y_a - y_{a-1} = x_{a-1} + x_a,$$

d'où l'on déduit

$$y_a = 2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{a-1}) + x_a;$$

cette formule, d'après la sommation connue des séries relatives aux nombres figurés, s'accorde avec l'expression générale de y_a ci-dessus.

2. Nous signalerons encore, comme conséquence très remarquable des relations fondamentales inscrites, la loi de récurrence

$$x_a = (n+2)x_{a-1} - x_{a-2},$$
$$y_a = (n+2)y_{a-1} - y_{a-2},$$

qui subsiste entre trois valeurs consécutives de chacune des indéterminées x, y, à partir de $a = 3$. Il s'en déduit une nouvelle preuve de l'exactitude des développements ci-dessus de x_a et y_a.

Il s'en déduit, en outre, ce qui n'est pas moins important, une nouvelle forme de développement pour ces mêmes quantités.

Faisons, à cet effet, $n = m - 2$, par où l'équation proposée prend la forme

$$(m+2)x^2 - (m-2)y^2 = 4,$$

m étant un entier > 2 ou < -2. Les indéterminées étant soumises à la loi indiquée, il y a lieu de leur appliquer la théorie bien connue des séries récurrentes; de la sorte, les valeurs successives de x et y seront représentées, respectivement, par les coefficients des puissances croissantes de la variable z, dans les développements des deux fractions rationnelles comprises dans l'expression $\frac{1 \mp z}{1 - mz + z^2}$.

On aura donc

$$\frac{1-z}{1-mz+z^2} = x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \ldots + x_a z^{a-1} + \ldots,$$
$$\frac{1+z}{1-mz+z^2} = y_1 + y_2 z + y_3 z^2 + \ldots + y_a z^{a-1} + \ldots,$$

les termes x_1 et y_1 étant égaux à l'unité. Il suffira évidemment de considérer l'un de ces développements, vu que l'autre s'y ramène par le changement simultané des signes de m et de z, et que par suite les valeurs absolues des coefficients x_a et y_a se déduisent l'une de l'autre, en changeant m en $-m$ (ce qui se voit d'ailleurs sur l'équation même).

On trouve ainsi, en se bornant aux valeurs de x,

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 + m, \\ x_3 &= -1 - m + m^2, \\ x_4 &= 1 - 2m - m^2 + m^3, \\ x_5 &= 1 + 2m - 3m^2 - m^3 + m^4, \\ x_6 &= -1 + 3m + 3m^2 - 4m^3 - m^4 + m^5, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

valeurs qui s'accordent avec les expressions obtenues précédemment.

D'après la théorie rappelée, pour exprimer le coefficient général x_a, on décomposera d'abord la fraction génératrice en deux fractions simples, après quoi le terme général du développement de la même fraction s'obtiendra en ajoutant ensemble les termes généraux des fractions partielles développées. Nous parviendrons, en procédant ainsi, d'abord à la formule de décomposition

$$\frac{1-z}{1-mz+z^2} = \frac{1}{m+2}\left(\frac{A+1}{A-z} + \frac{B+1}{B-z}\right),$$

puis à l'expression cherchée du coefficient de z^{a-1}, savoir

$$x_a = \frac{(A+1)A^{a-1} + (B+1)B^{a-1}}{m+2},$$

A et B étant les deux racines de l'équation

$$z^2 - mz + 1 = 0.$$

Il est bon d'ajouter que l'on a, dans ce qui précède, la résolution complète de l'équation considérée; en sorte que, entre deux solutions consécutives, données par nos formules, il ne saurait y avoir aucun système de valeurs intermédiaires de x et y satisfaisantes. Bornons-nous à dire, ici, que ce fait important peut s'établir par des considérations analogues à celles dont s'est servi Lagrange à l'égard de l'équation de Pell, dans le paragraphe VII, n° 75, des *Additions à l'analyse indéterminée d'Euler*.

3. *Remarque.* — Faisant, dans l'équation proposée, $x = 2u + 1$, $y = 2v + 1$, on a la transformée

$$(n+4)(u^2+u) = n(v^2+v),$$

dont la résolution, implicite dans ce qui précède, sert à déterminer une infinité de couples de nombres triangulaires ayant entre eux le rapport de n à $n+4$. Ce rapport, comme on voit, se réduit à celui de p à $p+1$, si $n = 4p$, et à celui de p à $p+2$, si $n = 2p$.

Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver tous les nombres triangulaires qui sont triples d'autres nombres de même espèce. Nous ferons $n = 2$, et la question sera résolue par l'équation

$$3(u^2+u) = v^2+v,$$

dont les solutions correspondent à celles de l'équation

$$3x^2 - y^2 = 2,$$

pour $u = \frac{x-1}{2}$, $v = \frac{y-1}{2}$. Les valeurs de x et y étant, à partir de x_1 et y_1,

$$x = 3,\quad 11,\quad 41,\quad 153,\quad 571,\quad \ldots,$$
$$y = 5,\quad 19,\quad 71,\quad 265,\quad 989,\quad \ldots,$$

celles de u et v seront

$$u = 1,\quad 5,\quad 20,\quad 76,\quad 285,\quad \ldots,$$
$$v = 2,\quad 9,\quad 35,\quad 132,\quad 494,\quad \ldots.$$

Les valeurs de $\frac{u^2+u}{2}$ et $\frac{v^2+v}{2}$ engendreront ensuite les deux séries

$$1,\quad 15,\quad 210,\quad 2926,\quad 40755,\quad \ldots,$$
$$3,\quad 45,\quad 630,\quad 8778,\quad 122265,\quad \ldots,$$

dont tous les termes sont des nombres triangulaires, chaque terme de la seconde étant triple de celui qui lui correspond dans la première.

ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

L'étude du mouvement apparent d'un point matériel libre, soumis à la seule influence de la pesanteur, est une des plus simples qu'on puisse se proposer comme application des théories du mouvement relatif; c'est peut-être une raison pour discuter avec attention certaines parties du problème. J'examinerai d'abord un simple point de détail : dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* pour 1862, Bour disait que, si l'on regarde l'attraction terrestre comme constante en grandeur et en direction, un point pesant nous semble se mouvoir sur une parabole qui tourne uniformément autour d'un certain axe; dans les *Nouvelles Annales* pour 1872, M. Resal conteste ce résultat; or on pourra voir que les formules mêmes du savant auteur de la *Mécanique générale* conduisent précisément à la proposition

énoncée par Bour. D'ailleurs, c'est ordinairement la résultante de l'attraction terrestre et de la force centrifuge, c'est-à-dire la pesanteur, qu'on traite comme une force constante; j'essaye de donner une interprétation géométrique simple aux équations du mouvement qui résultent de cette hypothèse. Le développement en série des coordonnées d'un point qu'on laisse tomber sans vitesse initiale ne donne pas de valeur sensible pour la déviation vers le sud que semblent indiquer les expériences de Reich, expériences classiques, mais dont M. Gilbert a signalé les discordances; cherchant ce que serait la déviation si l'attraction du globe pouvait être assimilée à celle d'un ellipsoïde homogène, je trouve une valeur encore peu sensible, quoique supérieure à celle qui répond à une direction constante pour la pesanteur. En regardant toujours la Terre comme un ellipsoïde homogène, on trouve des équations compliquées pour le mouvement d'un point lancé à l'extérieur; mais il nous sera facile d'en obtenir des intégrales suffisamment approchées pour toutes les vérifications expérimentales qu'on pourrait essayer.

Soient :

O le centre de la Terre;

A un point de l'hémisphère boréal dont la latitude est φ, et d'où partira le mobile que nous considérons;

Ox la projection de OA sur l'équateur;

Oz la partie de l'axe du monde dirigée vers le nord;

Oy la perpendiculaire à zOx dirigée vers l'ouest;

AX, AY, AZ trois axes menés par le point A et dirigés, le premier suivant la partie sud de la méridienne, le second suivant la ligne est-ouest, le troisième suivant la verticale ascendante;

ω la vitesse de rotation de la Terre.

Nous supposerons la masse du mobile égale à l'unité. Quant à la disposition de nos axes coordonnés, moins rationnelle que celle de l'Astronomie, c'est celle qu'on adopte ordinairement en Mécanique.

Plaçons-nous d'abord au point de vue de Bour, et regardons l'attraction terrestre comme toujours parallèle à la verticale du point A; nous regarderons aussi l'intensité de cette force comme constante, et nous la représenterons par g, en sorte que ses composantes suivant Ox, Oy, Oz seront

$$-g\cos\varphi,\quad 0,\quad -g\sin\varphi;$$

au contraire, pour la force d'inertie d'entraînement, ou force centrifuge, et pour la force centrifuge composée, nous prendrons les composantes exactes données par le théorème de Coriolis, et nous aurons pour les équations du mouvement d'un point pesant rapporté aux axes $Oxyz$

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -g\cos\varphi + \omega^2 x - 2\omega\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \omega^2 y + 2\omega\frac{dx}{dt},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

M. Resal (*Nouvelles Annales*, 1872, p. 436) met les intégrales de ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \frac{g}{\omega^2}\cos\varphi + A\cos(\omega t+\alpha) + Bt\cos(\omega t+\beta),\\ y &= A\sin(\omega t+\alpha) + Bt\sin(\omega t+\beta),\\ z &= -\tfrac{1}{2}gt^2\sin\varphi + Ct + D. \end{aligned}$$

Maintenant rapportons les positions du mobile à trois axes entraînés dans le mouvement de la Terre et en même temps mobiles par rapport à l'observateur : par

un point O_1, pris sur Ox à une distance $\frac{g\cos\varphi}{\omega^2}$ du point O, passeront deux des axes O_1x_1, O_1y_1, situés dans l'équateur et faisant respectivement avec O_1x les angles $\omega t + \beta$, $\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}$; le troisième axe, O_1z_1, sera parallèle à Oz. Les coordonnées du mobile par rapport à $O_1x_1y_1z_1$ seront

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(x - \frac{g\cos\varphi}{\omega^2}\right)\cos(\omega t + \beta) + y\sin(\omega t + \beta) \\ &= A\cos(\beta - \alpha) + Bt, \\ y_1 &= -\left(x - \frac{g\cos\varphi}{\omega^2}\right)\sin(\omega t + \beta) + y\cos(\omega t + \beta) \\ &= A\sin(\beta - \alpha), \\ z_1 &= z = -\tfrac{1}{2}gt^2\sin\varphi + Ct + D; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le mobile se déplace, par rapport aux nouveaux axes, suivant une parabole dont l'axe est parallèle à la ligne des pôles; comme d'ailleurs ces axes tournent autour de O_1z_1 avec une vitesse égale, mais de sens contraire à celle de la Terre, le corps pesant nous semblera se mouvoir sur une parabole tournant autour d'une droite parallèle à son axe de symétrie. C'est la proposition énoncée par Bour.

Si, grâce à la petitesse des déplacements du mobile comparés aux dimensions de la Terre, on peut négliger les variations de l'intensité et de la direction de l'attraction terrestre, il est naturel d'admettre la même approximation pour la force centrifuge et de remplacer les deux forces par leur résultante, la pesanteur, qu'on regardera comme constante et toujours parallèle à ZA. Les équations du mouvement ne diffèrent des équations (1) que par la suppression des termes $\omega^2 x$ et $\omega^2 y$; g y reprend d'ailleurs sa signification ordinaire. Les intégrales ont une forme bien différente de celle que nous avons

trouvée dans l'hypothèse de Bour; rien n'est plus facile que de les trouver et de les mettre sous la forme suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} x = \mathrm{A}\cos(2\omega t + \alpha) + \mathrm{B}, \\ y = \mathrm{A}\sin(2\omega t + \alpha) + \mathrm{C} - \dfrac{g\cos\varphi}{2\omega}\,t, \\ z = -\tfrac{1}{2}gt^2\sin\varphi + \mathrm{E}t + \mathrm{F}. \end{cases}$$

Si l'on faisait abstraction des termes en $\sin(2\omega t + \alpha)$ et $\cos(2\omega t + \alpha)$, on aurait une trajectoire parabolique; d'ailleurs ces termes eux-mêmes correspondraient à un mouvement circulaire; on voit donc qu'un point pesant, lancé à la surface de la Terre, semble décrire uniformément un cercle parallèle à l'équateur et dont le centre parcourt une parabole ayant son axe parallèle à l'axe du monde. On peut aussi dire que le point se meut sur une parabole animée d'un mouvement de translation circulaire autour d'une parallèle à l'axe du monde, résultat essentiellement différent de celui de Bour. On voit immédiatement que la projection du mobile sur l'équateur décrit une cycloïde ou une trochoïde.

La surface engendrée par un cercle qui se transporte parallèlement à lui-même, de manière que son centre décrive une parabole ayant son axe perpendiculaire au plan du cercle est une surface du quatrième degré; on en aperçoit aisément la forme : il y a, pour ainsi dire, deux nappes qui se coupent suivant un arc parabolique, et se raccordent suivant le cercle dont le centre est au sommet de la parabole directrice; le long de ce cercle, le plan d'une des sections principales passe toujours par l'axe de la parabole directrice et la courbure correspondante varie suivant une loi très simple.

Si l'on donne les coordonnées x_0 et z_0 du point A et les composantes a, b, c de la vitesse initiale du mobile, on pourra déterminer les constantes qui entrent dans

les intégrales (2), et l'on trouvera

$$(3)\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{a}{2\omega}\sin 2\omega t - \dfrac{2b\omega + g\cos\varphi}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t), \\ y = \dfrac{2b\omega + g\cos\varphi}{4\omega^2}\sin 2\omega t + a\,\dfrac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega} - \dfrac{g\cos\varphi}{2\omega}\,t, \\ z = z_0 + ct - \frac{1}{2}gt^2\sin\varphi. \end{cases}$$

Pour que la projection du mobile sur l'équateur décrive une cycloïde proprement dite, il faut qu'on ait

$$(a^2 + b^2)\omega + bg\cos\varphi = 0.$$

On trouverait les coordonnées du mobile relativement aux axes AX, AY, AZ, qui sont les plus commodes pour l'observation, en remarquant qu'on a

$$X = (x - x_0)\sin\varphi - (z - z_0)\cos\varphi,$$
$$Y = y,$$
$$Z = (x - x_0)\cos\varphi + (z - z_0)\sin\varphi,$$

et en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (3); il sera convenable d'exprimer a et c en fonction des composantes de la vitesse initiale suivant AX et AZ.

Considérons le cas où a, b, c sont nuls, c'est-à-dire où le mobile tombe sans vitesse initiale : les équations (3) deviennent

$$x = x_0 - \frac{g\cos\varphi}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t),$$

$$y = -\frac{g\cos\varphi}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t),$$

$$z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2\sin\varphi;$$

la projection sur l'équateur décrit une cycloïde dont la base est parallèle à Oy; le point de départ est le point de rebroussement, et le cercle générateur a pour rayon

$$\frac{g\cos\varphi}{4\omega^2}.$$

On a ensuite

$$X = \frac{1}{2} g \sin\varphi \cos\varphi \left(t^2 - \frac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega^2} \right),$$

$$Y = -\frac{g \cos\varphi}{4\omega^2} (2\omega t - \sin 2\omega t),$$

$$Z = -\frac{1}{2} g t^2 \sin^2\varphi - g \cos^2\varphi \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2}.$$

On peut développer ces expressions suivant les puissances de ω et retrouver les résultats que donne ordinairement l'intégration par approximations successives. Si l'on veut pousser l'approximation un peu loin, la méthode précédente aura un avantage réel. On trouve

$$X = \frac{1}{6} g \omega^2 t^4 \sin\varphi \cos\varphi \left(1 - \frac{2}{15} \omega^2 t^2 + \frac{1}{105} \omega^4 t^4 - \ldots \right),$$

$$Y = -\frac{1}{3} g \omega t^3 \cos\varphi \left(1 - \frac{1}{5} \omega^2 t^2 + \frac{2}{105} \omega^4 t^4 - \ldots \right),$$

$$Z = -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{6} g \omega^2 t^4 \cos^2\varphi \left(1 - \frac{2}{15} \omega^2 t^2 + \ldots \right).$$

Considérons une hauteur de chute h; on a sensiblement

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

puis

$$X = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 h^2}{g} \sin 2\varphi_1, \quad Y = -\frac{2}{3} \omega \cos\varphi \sqrt{\frac{2h^3}{g}}.$$

Les expériences de Reich, pour

$$h = 158^m,54, \quad \varphi = 50^\circ 52',$$

indiquaient une déviation vers l'est égale en moyenne à $0^m,0284$, et une déviation vers le sud égale à $0^m,0437$: les formules précédentes donnent pour ces déviations $0^m,0275$ et $0^m,000\,004$; la première s'accorde très bien avec l'expérience, mais la seconde est en complet désaccord.

Il y a lieu de chercher quelle valeur on trouverait pour la déviation australe en assimilant l'attraction terrestre à celle d'un ellipsoïde homogène et de révolution. Considérons un point pesant qui tombe dans un puits, c'est-à-dire à l'intérieur de la masse attirante : les composantes de l'attraction, proportionnelles, on le sait, aux coordonnées du point attiré, peuvent se représenter par $-\lambda^2 x$, $-\lambda^2 y$, $-\mu^2 z$ et les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\lambda^2 - \omega^2)x - 2\omega\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(\lambda^2 - \omega^2)y + 2\omega\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu^2 z.$$

On cherche, pour les deux premières, des intégrales de la forme $x = e^{rt}, y = se^{rt}$; les valeurs de r sont imaginaires, mais très simples; la troisième équation s'intègre immédiatement, et l'on peut mettre les intégrales générales du problème sous la forme

$$x = \mathrm{A}\cos[(\lambda+\omega)t+\alpha] + \mathrm{B}\cos[(\lambda-\omega)t+\beta],$$
$$y = \mathrm{A}\sin[(\lambda+\omega)t+\alpha] - \mathrm{B}\sin[(\lambda-\omega)t+\beta],$$
$$z = \mathrm{C}\cos(\mu t+\gamma).$$

Le mouvement défini par ces équations, sous leur forme générale, est compliqué; mais nous nous bornerons au cas où la vitesse initiale est nulle, ce qui permet de déterminer les arbitraires. On trouve alors

$$x = \frac{x_0}{2\lambda}[(\lambda+\omega)\cos(\lambda-\omega)t + (\lambda-\omega)\cos(\lambda+\omega)t],$$
$$y = \frac{x_0}{2\lambda}[(\lambda-\omega)\sin(\lambda+\omega)t - (\lambda-\omega)\sin(\lambda-\omega)t],$$
$$z = z_0\cos\mu t.$$

Pour étudier, pendant les premières secondes de la chute, le mouvement défini par ces équations, je développe $x - x$, y, $z - z_0$ suivant les puissances croissantes de t, en me bornant aux premiers termes des séries, qu'on met aisément sous la forme suivante :

$$x - x_0 = -\frac{\lambda^2 - \omega^2}{2} x_0 \left(t^2 - \frac{\lambda^2 + 3\omega^2}{12} t^4 + \ldots \right),$$
$$y = -\frac{\lambda^2 - \omega^2}{3} x_0 (\omega t^3 + \ldots),$$
$$z - z_0 = -\frac{1}{2} \mu^2 z_0 \left(t^2 - \frac{1}{12} \mu^2 t^4 + \ldots \right).$$

Remarquons que $(\lambda^2 - \omega^2) x_0$ et $\mu^2 z_0$ sont les composantes, parallèles à Ox et à Oz, du poids du mobile à son départ; donc

$$(\lambda^2 - \omega^2) x_0 = g \cos\varphi, \quad \mu^2 z_0 = g \sin\varphi,$$

et les équations précédentes deviennent

$$x - x_0 = -\frac{1}{2} g t^2 \cos\varphi \left[1 - \left(\frac{g \cos\varphi}{12 x_0} + \frac{\omega^2}{3} \right) t^2 + \ldots \right],$$
$$y = -\frac{1}{3} g \omega t^3 \cos\varphi + \ldots,$$
$$z - z_0 = -\frac{1}{2} g t^2 \sin\varphi \left(1 - \frac{g \sin\varphi}{12 z_0} t^2 \ldots \right).$$

La valeur de y nous donne la même déviation orientale que tout à l'heure; pour avoir le mouvement suivant la verticale et la déviation australe, nous déduirons X et Z de $x - x_0$ et de $z - z_0$ par la transformation déjà employée; il viendra

$$\mathrm{X} = \frac{1}{6} g t^4 \sin\varphi \cos\varphi \left(\omega^2 + \frac{g \cos\varphi}{4 x_0} - \frac{g \sin\varphi}{4 z_0} \right) + \ldots,$$
$$\mathrm{Z} = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} g t^4 \left(\omega^2 + \frac{g \cos^3\varphi}{x_0} + \frac{g \sin^3\varphi}{z_0} \right) + \ldots.$$

Soient α et β les demi-axes de l'ellipse méridienne,

e son excentricité, p la distance du centre de la Terre au plan tangent en A; φ étant l'angle de la normale à l'ellipse avec son axe focal, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos\varphi}{x_0} - \frac{\sin\varphi}{z_0} = \frac{p}{\alpha^2} - \frac{p}{\beta^2} = -\frac{pe^2}{\beta^2}, \\ &X = \frac{1}{12} g t^4 \sin 2\varphi \left(\omega^2 - \frac{1}{4}\frac{pge^2}{\beta^2}\right) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs $\frac{p}{\beta^2}$ diffère peu de $\frac{1}{\alpha}$, et la théorie de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation donne sensiblement $\frac{ge^2}{\alpha} = \frac{5}{2}\omega^2$; enfin, si la hauteur de chute est h, on pourra dans X remplacer t^2 par $\frac{2h}{g}$, et l'on aura pour valeur approchée de la déviation australe

$$X' = \frac{1}{8}\frac{\omega^2 h^2}{g}\sin 2\varphi.$$

Cette valeur n'est que les $\frac{3}{8}$ de celle que donnait la théorie précédente et est encore plus en désaccord avec la déviation annoncée par Reich. Mais il y a une remarque très importante à faire : à mesure qu'on pénètre dans la Terre en suivant la verticale du point A, la direction de la pesanteur varie; un fil à plomb, attaché en A, prend la direction de la pesanteur à son extrémité inférieure et s'écarte, vers le nord, de la verticale AZ, ce qui augmente la déviation apparente du corps qu'on laisse tomber. Il s'agit de calculer la quantité u dont l'extrémité d'un fil à plomb de longueur h s'éloigne au nord de la verticale AZ. Les coordonnées de l'extrémité du fil par rapport à AXYZ sont

$$X_1 = -u, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = -h,$$

et, par conséquent, les coordonnées relatives à $Oxyz$

sont

$$x_1 = x_0 - h\cos\varphi - u\sin\varphi,\quad y_1 = 0,\quad z_1 = z_0 - h\sin\varphi + u\cos\varphi;$$

les composantes de la pesanteur en ce point sont

$$(\lambda^2 - \omega^2)x_1 = \frac{g x_1}{x_0}\cos\varphi,\quad 0,\quad \mu^2 z_1 = \frac{g z_1}{z_0}\sin\varphi.$$

Pour que le fil soit en équilibre, il faut que la première et la troisième de ces composantes soient proportionnelles à $x_0 - x_1$ et à $z_0 - z_1$; donc

$$\frac{(x_0 - h\cos\varphi - u\sin\varphi)\cos\varphi}{x_0(h\cos\varphi + u\sin\varphi)} = \frac{(z_0 - h\sin\varphi + u\cos\varphi)\sin\varphi}{z_0(h\sin\varphi - u\cos\varphi)};$$

chassons les dénominateurs, divisons par $x_0 z_0$ et ayons égard à la relation (4), nous trouverons

$$\frac{ph^2e^2}{\beta^2}\sin 2\varphi - 2\left(1 + \frac{phe^2}{\beta^2}\cos 2\varphi\right)u - \frac{pe^2}{\beta^2}u^2\sin 2\varphi = 0.$$

Cette équation a deux racines, l'une très grande, l'autre très petite; c'est celle-ci qui nous convient; elle a pour valeur approchée

$$u' = \frac{1}{2}\frac{ph^2e^2}{\beta^2}\sin 2\varphi$$

ou, en remplaçant, comme on l'a déjà fait, $\frac{p}{\beta^2}$ par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{e^2}{\alpha}$ par $\frac{5}{2}\frac{\omega^2}{g}$,

$$u' = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 h^2}{g}\sin 2\varphi.$$

Telle est la quantité dont le fil à plomb dévie au nord de la verticale du point A; la déviation apparente du corps qu'on a laissé tomber devrait donc être égale à

$$u' + X' = \frac{11}{8}\frac{\omega^2 h^2}{g}\sin 2\varphi;$$

c'est plus de quatre fois la valeur trouvée en regardant comme constante la direction de la pesanteur, mais, dans les conditions où Reich a fait ses expériences, cela ne

donnerait encore que $0^m,000017$ de déviation australe, et l'on peut s'assurer que la résistance de l'air au mouvement du corps qui tombe modifie très peu ce résultat. On est encore bien loin de la déviation annoncée par Reich, et il faut en conclure ou que cette déviation tenait à des circonstances locales, ou, ce qui est plus probable, que les expériences n'étaient pas suffisamment exactes, et que les physiciens auraient intérêt à les reprendre dans des puits profonds, comme les y invite M. Gilbert.

Venons enfin au mouvement d'un point pesant lancé dans l'atmosphère; il est facile d'en écrire les équations différentielles sous forme explicite, puisqu'on sait exprimer en quantités finies les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde planétaire sur un point extérieur; mais ces équations ne sont plus linéaires, et leur intégration est difficile. On trouverait des intégrales approchées en développant en séries les composantes de l'attraction; mais, si l'on veut se borner à une première approximation, il est bien plus simple d'évaluer directement la partie principale des variations que le déplacement du mobile fait éprouver aux composantes de la pesanteur. Considérons les coordonnées X, Y, Z, et appelons R le rayon moyen de la Terre; si l'on commet une erreur sensible en regardant la pesanteur comme dirigée vers le centre du globe et inversement proportionnelle au carré de la distance à ce centre, l'erreur devient négligeable quand on adopte cette hypothèse pour calculer les variations de la pesanteur; les composantes parallèles à AX et à AY, nulles en A, seront, pour une position différente, $-\frac{gX}{R}$, $-\frac{gY}{R}$; la composante parallèle à AZ sera approximativement

$$-\frac{gR^2}{(R+Z)^2} \quad \text{ou} \quad -g+\frac{2gZ}{R};$$

les équations du mouvement deviennent alors

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -g\frac{X}{R} - 2\omega\sin\varphi\frac{dY}{dt},$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -g\frac{Y}{R} + 2\omega\left(\cos\varphi\frac{dZ}{dt} + \sin\varphi\frac{dX}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -g + \frac{2g}{R}Z - 2\omega\cos\varphi\frac{dY}{dt}.$$

Intégrons par approximations successives : si nous négligeons d'abord les termes en u et en $\frac{g}{R}$, nous aurons

$$X = At,\quad Y = Bt,\quad Z = Ct - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Une seconde approximation nous donnera

$$X = At - B\omega t^2\sin\varphi - \frac{1}{6}\frac{Ag}{R}t^3,$$

$$Y = Bt + (A\sin\varphi + C\cos\varphi)\omega t^2 - \frac{1}{6}\left(2\omega\cos\varphi + \frac{B}{R}\right)t^2,$$

$$Z = Ct - \frac{1}{2}gt^2 - B\omega t^2\cos\varphi + \frac{1}{3}\frac{Cg}{R}t^3 - \frac{1}{12}\frac{g^2}{R}t^4.$$

Il n'y a pas lieu de pousser l'approximation plus loin; les expressions précédentes suffisent pour faire apprécier l'influence de la rotation diurne et des variations de la pesanteur; pour des vérifications expérimentales, il faudrait avoir égard à la résistance de l'air qui joue un grand rôle, mais dont la considération nous éloignerait de l'objet de cet article.

NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR UNE MÉTHODE D'ÉLIMINATION (1);

PAR M. L. SALTEL.

Cette méthode, et c'est là son caractère principal, per-

(1) Voir t. XX, 2e série des *Nouvelles Annales*.

met d'éliminer *successivement* ([1]), par la simple résolution de l'équation

$$ax^n + b = 0, \quad (1)$$

$k - 1$ inconnues entre k équations. Elle repose, rappelons-le, sur deux points principaux : le premier est relatif aux *solutions étrangères* qui s'introduisent *nécessairement* par la substitution, dans une ou plusieurs des autres équations, de la valeur

$$x^n = -\frac{b}{a}, \quad (2)$$

déduite de (1); le second indique le moyen de supprimer, dans la suite des calculs, ces non-solutions.

Nous regrettons de ne pas avoir mentionné, dans notre première Communication, les remarques et applications suivantes, qui jettent un jour nouveau sur ce procédé, qui est incontestablement le plus simple en théorie ([2]) et le plus rapide en pratique aussitôt que le nombre des équations devient supérieur à deux ([3]).

I. — REMARQUES.

Remarque I. — Soient deux équations

$$A(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$
$$B(x, y, z, t) = 0, \quad (2)$$

([1]) On peut lire, dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Serret, que le procédé par *éliminations successives* était jusqu'ici seulement applicable aux équations du premier degré.

([2]) On pourrait bien objecter que parfois la détermination du degré de multiplicité des solutions étrangères est délicate, mais, somme toute, ce nombre n'est pas indispensable; il suffit de supprimer ces non-solutions préalablement connues le plus grand nombre de fois possible.

([3]) Il est même souvent le plus rapide dans le cas de deux équations incomplètes, c'est-à-dire dans le cas où ces équations ne sont pas les plus générales de leur espèce.

supposées algébriques et entières par rapport à x, y, z, t. Si toutes les solutions de (1) conviennent à (2), cette équation (2) pourra s'écrire sous la forme

$$B(x, y, z, t).C(x, y, z, t) = 0, \tag{3}$$

l'expression

$$C(x, y, z, t) \tag{4}$$

représentant un polynôme algébrique entier en x, y, z, t.

Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que, toutes les solutions de (1) vérifiant (2), il en résulte, en considérant y, z, t comme des coefficients ayant des valeurs arbitraires, que toutes les solutions de l'équation (1) à une seule inconnue x vérifient l'équation (2) également à une seule inconnue; donc, d'après un théorème élémentaire, l'équation (2) peut bien s'écrire sous la forme (3).

Remarque II. — Nous avons déjà fait observer que si, dans les deux équations

$$(S) \begin{cases} A_1(x, y)\alpha^m + A_2(x, y)\alpha^{m-1} + \ldots + A_{m+1}(x, y) = 0, & (1) \\ B_1(x, y)\alpha^n + B_2(x, y)\alpha^{n-1} + \ldots + B_{n+1}(x, y) = 0, & (2) \end{cases}$$

on a identiquement

$$A_1(x, y) = B_1(x, y), \tag{3}$$

la substitution de

$$\alpha^n = -\frac{B_2\alpha^{n-1} + \ldots + B_{n+1}}{B_1} \tag{4}$$

n'introduit pas de solution étrangère, pourvu que l'on ait soin, avant de chasser les dénominateurs, de laisser le numérateur et le dénominateur du premier terme par $B_1(x, y)$; on peut ajouter quelque chose de plus : en procédant de la sorte, on supprime la solution

$$A_1(x, y) = 0, \tag{5}$$

résultant de α infini; ajoutons encore que, si l'on a iden-

tiquement

$$A_{m+1}(x,y) = B_{n+1}(x,y), \qquad (6)$$

le système (S) étant vérifié par

$$\begin{cases} \alpha = 0, & (7) \\ A_{m+1}(x,y) = 0, & (8) \end{cases}$$

on pourra supprimer la courbe représentée par (8), en posant

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}$$

et prenant α' pour nouveau paramètre variable.

Remarque III. — Soient

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} A(x,y,z,t).v + B(x,y,z,t) = 0, & (1) \\ C(x,y,z,t,v) = 0 & (2) \end{cases}$$

deux équations contenant cinq inconnues x, y, z, t, v [1]. Le système

$$(\beta) \qquad \begin{cases} A(x,y,z,t).v + B(x,y,z,t) = 0, & (3) \\ D(x,y,z,t) = 0, & (4) \end{cases}$$

obtenu en substituant, dans (2), à la place de v, la valeur

$$v = -\frac{B(x,y,z,t)}{A(x,y,z,t)} \qquad (5)$$

déduite de (1), n'est pas *entièrement* équivalente à (α), attendu que ce dernier système est vérifié, quelle que soit la valeur attribuée à v par toutes les solutions en x, y, z, t communes à

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} A(x,y,z,t) = 0, & (6) \\ B(x,y,z,t) = 0, & (7) \end{cases}$$

---

(1) C'est uniquement pour mieux préciser que nous prenons *cinq* inconnues; il est bien entendu que la remarque en question est indépendante de ce nombre.

tandis que le système (α) donne, par l'équation (2), pour chacune de ces solutions particulières, un nombre déterminé de valeurs de v, nombre égal à la plus haute puissance de cette inconnue dans cette équation (2).

Ainsi : (β) *est équivalent à* (α) *pour toutes les solutions relatives aux quatre inconnues* x, y, z, t, *mais il n'est équivalent à* (α), *relativement aux cinq inconnues* x, y, z, t, v, *que pour les solutions ne résultant pas des racines communes à* (6), (7).

Généralisation. — D'une manière plus générale, si l'on a le système de deux équations

$$(\delta) \qquad \begin{cases} U_1(x, y, z, t, v) = 0, & (8) \\ U_2(x, y, z, t, v) = 0, & (9) \end{cases}$$

et qu'on lui substitue le système

$$(\varepsilon) \qquad \begin{cases} V_1(x, y, z, t).v + V_2(x, y, z, t) = 0, & (10) \\ W(x, y, z, t) = 0, & (11) \end{cases}$$

obtenu en éliminant entre ces deux équations, par un procédé quelconque ([1]), l'inconnue v, ce système est bien équivalent à (8) pour toutes les valeurs relatives aux *quatre* inconnues x, y, z, t; mais, comme l'équation (11) est *nécessairement* ([2]) vérifiée par les solutions communes à

$$(\varphi) \qquad \begin{cases} V_1(x, y, z, t) = 0, & (12) \\ V_2(x, y, z, t) = 0, & (13) \end{cases}$$

il n'est équivalent à (8), relativement aux *cinq* inconnues x, y, z, t, v, que pour les solutions ne vérifiant pas

---

([1]) Il est bien entendu, redisons-le une fois pour toutes, que, si l'on a suivi, pour faire cette élimination, notre méthode, appliquée au cas de deux équations, nous supposons les fonctions V_1, V_2, W débarrassées des facteurs étrangers.

([2]) C'est notre méthode qui nous a conduit à l'observation de cet important résultat.

(12), (13). On verra plus loin l'importance de cette remarque.

II. — Première application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z communes à un système de la forme*

$$(A) \quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (1) \\ U_1(x,y,z) = 0, & (2) \\ U_2(x,y,z) = 0, & (3) \end{cases}$$

les fonctions V_1, V_2, U_1, U_2 *étant algébriques et entières.*

Solution. — Pour plus de clarté, nous supposerons les fonctions U_1, U_2 d'ordres m_1, m_2 par rapport à z.

Cela dit, observons d'abord qu'il n'est pas exact de dire que le système

$$(B) \quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (4) \\ W_1(x,y) = 0, & (5) \\ W_2(x,y) = 0, & (6) \end{cases}$$

obtenu en substituant, dans (2), (3), à la place de z, la valeur

$$z = -\frac{V_2(x,y)}{V_1(x,y)} \quad (7)$$

déduite de (1), soit équivalent au système (A); ce dernier système est, en effet, vérifié par les solutions en x, y communes à

$$(C) \quad \begin{cases} V_1(x,y) = 0, & (8) \\ V_2(x,y) = 0, & (9) \end{cases}$$

tandis que le système (A) n'admet généralement pas ces solutions. Le système (B) se compose donc du système (A), plus du système (C) *compté un certain nombre de fois*. Comment déterminer ce dernier degré de multiplicité? C'est là une question qui nous a semblé assez

longtemps fort difficile. Il suffit cependant d'observer que les courbes représentées par (5), (6) admettent respectivement les points communs aux courbes représentées par (8), (9) pour points multiples d'ordres m_1, m_2 (1); par conséquent, les solutions étrangères représentées par (C) doivent être chacune comptées $m_1 m_2$ fois (2); donc, si les équations

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \mathrm{M}_1(x).y + \mathrm{M}_2(x) = 0, & (10) \\ \mathrm{M}_3(x) = 0, & (11) \end{cases}$$

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \mathrm{N}_1(x).y + \mathrm{N}_2(x) = 0, & (12) \\ \mathrm{N}_3(x) = 0 & (13) \end{cases}$$

sont celles que l'on obtient en éliminant y entre (5), (6) et (8), (9), le polynôme $\mathrm{M}_3(x)$ devra être divisible par le polynôme $\mathrm{N}_3(x)$ élevé à la puissance $n_1 n_2$. En représentant par $\mathrm{P}(x)$ le quotient, le système proposé (A) sera *équivalent* à

$$(\mathrm{A}') \quad \begin{cases} \mathrm{V}_1(x,y).z + \mathrm{V}_2(x,y) = 0, & (14) \\ \mathrm{M}_1(x).y + \mathrm{M}_2(x) = 0, & (15) \\ \mathrm{P}(x) = 0. & (16) \end{cases}$$

III. — Deuxième application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z communes aux trois équations*

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \mathrm{U}_1(x,y,z) = 0, & (1) \\ \mathrm{V}_2(x,y,z) = 0, & (2) \\ \mathrm{V}_3(x,y,z) = 0, & (3) \end{cases}$$

supposées algébriques et entières.

---

(1) Ces équations (5), (6) peuvent, en effet, être considérées comme représentant les équations des courbes définies par (1), (2) et (1), (3), où l'on considère z comme un paramètre variable.

(2) En supposant que les points multiples en question n'aient pas de tangentes communes, ce qui a lieu si les équations (1), (2), (3) sont indépendantes entre elles, on voit qu'à chacune des solutions communes à (8), (9) correspondent respectivement, d'après (5), (6), $m_1 m_2$ valeurs de z.

Solution. — Éliminons, par notre méthode ou par l'une quelconque des méthodes connues, z entre les équations (1), (2), et soit

$$(B)\quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (4)\\ W_1(x,y) = 0 & (5) \end{cases}$$

le résultat obtenu.

Substituons au système (A) le système

$$(C)\quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (6)\\ W_1(x,y) = 0, & (7)\\ V_3(x,y) = 0, & (8) \end{cases}$$

obtenu en remplaçant les équations (1), (2) par (4), (5).

Ayant déjà montré, dans notre première Communication, que les points communs aux courbes définies par

$$(D)\quad \begin{cases} V_1(x,y) = 0, & (9)\\ V_2(x,y) = 0 & (10) \end{cases}$$

représentent, en général, des points doubles ou simples de la courbe représentée par (7) ([1]), on voit que (C) se compose de (A) plus du système étranger

$$(E)\quad \begin{cases} V_1(x,y) = 0, & (11)\\ V_2(x,y) = 0, & (12)\\ V_3(x,y) = 0. & (13) \end{cases}$$

Cette observation faite, substituons dans (8), à la place de z, la valeur donnée par (6), on aura le système

$$(F)\quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (14)\\ W_1(x,y) = 0, & (15)\\ W_2(x,y) = 0, & (16) \end{cases}$$

qui se composera du système proposé (A), plus des solutions communes à (D) comptées avec un certain degré

([1]) Nous reviendrons sur ce point dans une Note spéciale.

de multiplicité. Il est bien entendu que l'on déterminera ce dernier degré de multiplicité en se rappelant que tous les points définis par (D) ont le même degré de multiplicité dans la courbe représentée par (16), et que les uns sont *doubles*, et les autres *peuvent* être *simples* dans la courbe définie par (15).

Nota. — Bien qu'ayant supposé que les surfaces représentées par (1), (2), (3) n'avaient pas de ligne commune, notre méthode, et c'est la seule douée de ce privilège, permet de trouver, comme nous allons le constater dans l'application suivante, tous les points communs situés en dehors de cette ligne commune.

IV. — Troisième application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z, t communes à un système de la forme*

$$(A)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (1)\\ U_1(x,y,z,t) = 0, & (2)\\ U_2(x,y,z,t) = 0, & (3)\\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (4)\end{cases}$$

supposées algébriques et entières.

Le système

$$(B)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (5)\\ W_1(x,y,z) = 0, & (6)\\ W_2(x,y,z) = 0, & (7)\\ W_3(x,y,z) = 0, & (8)\end{cases}$$

obtenu en substituant, dans (2), (3), (4), à la place de t, la valeur

$$t = -\frac{V_2(x,y,z)}{V_1(x,y,z)} \qquad (9)$$

déduite de (1), n'est pas équivalent au système (A); ce dernier système est, en effet, vérifié par les solutions de

x, y, z communes à

$$(C) \quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (10) \\ V_2(x,y,z) = 0; & (11) \end{cases}$$

on peut même ajouter, si l'on considère x, y, z comme coordonnées courantes, et si l'on suppose que n_1, n_2, n_3 soient les plus hauts exposants de t dans (2), (3), (4), que la courbe gauche définie par (C) est respectivement multiple d'ordre n_1, n_2, n_3 pour les surfaces représentées par (6), (7), (8). L'élimination de deux des inconnues entre (6), (7), (8) doit donc conduire à l'identité $0 = 0$. Voici comment nous levons cette indétermination ([1]).

Substituons seulement la valeur (9) dans les équations (2), (3), et considérons le système

$$(D) \quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (12) \\ W_1(x,y,z) = 0, & (13) \\ W_2(x,y,z) = 0, & (14) \end{cases}$$

qui se composera évidemment du système

$$(E) \quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (15) \\ U_1(x,y,z,t) = 0, & (16) \\ U_2(x,y,z,t) = 0, & (17) \end{cases}$$

plus du système défini par (C).

Substituons au système (D) le système

$$(D') \quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (18) \\ M_1(x,y).z + M_2(x,y) = 0, & (19) \\ M_3(x,y) = 0, & (20) \end{cases}$$

obtenu en éliminant, par un procédé quelconque, z entre (13), (14), et représentons par

$$(C') \quad \begin{cases} N_1(x,y).z + N_2(x,y) = 0, & (21) \\ N_3(x,y) = 0 & (22) \end{cases}$$

([1]) Nous avions déjà indiqué, dans le Mémoire : *Sur un paradoxe mathématique,* l'idée d'éliminer un ou plusieurs paramètres en vue de faire naître des facteurs.

le système résultant de l'élimination de z entre les équations (C).

Toutes les solutions de (22) vérifiant (C′) et étant partant comprises dans (D′), le premier membre de (20) est nécessairement divisible un certain nombre de fois par le premier membre de (22); représentons par $R(x,y)$ le quotient, le système

$$(E')\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (23)\\ M_1(x,y).z + M_2(x,y) = 0, & (24)\\ R(x,y) = 0 & (25)\end{cases}$$

se composera du système (E) plus du système

$$(F)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (26)\\ V_2(x,y,z) = 0, & (27)\\ R(x,y) = 0, & (28)\end{cases}$$

attendu que (C) vérifiant (13), (14) vérifie aussi (24), qui n'est autre que (19); donc le système

$$(E'')\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (29)\\ M_1(x,y).z + M_2(x,y) = 0, & (30)\\ R(x,y) = 0, & (31)\\ U_3(x,y,z,t) = 0 & (32)\end{cases}$$

se composera du système proposé (A) plus du système étranger

$$(F')\quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (33)\\ V_2(x,y,z) = 0, & (34)\\ R(x,y) = 0, & (35)\\ U_3(x,y,z,t) = 0. & (36)\end{cases}$$

Ces deux derniers systèmes admettant tous les deux un nombre fini de solutions communes en x, y, z, t et la résolution du système (F′) étant comprise dans les applications précédentes, on voit que toute la question est réduite à résoudre (E″).

Pour cela, substituons dans (32) à la place de t la va-

leur déduite de (29), on aura le système

$$(G)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (37) \\ M_1(x,y).z + M_2(x,y) = 0, & (38) \\ R(x,y) = 0, & (39) \\ W_3(x,y,z) = 0, & (40) \end{cases}$$

qui se composera de (E'') plus du système (F); ces deux derniers systèmes admettant encore un nombre fini de solutions communes en x, y, z, t, et, leur résolution étant comprise dans les applications précédentes, le problème proposé est définitivement résolu.

V. — Quatrième application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z, t communes aux équations*

$$(A)\quad \begin{cases} U_1(x,y,z,t) = 0, & (1) \\ U_2(x,y,z,t) = 0, & (2) \\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (3) \\ U_4(x,y,z,t) = 0, & (4) \end{cases}$$

supposées algébriques et entières.

Solution. — Substituons à ce système le système

$$(B)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (5) \\ W(x,y,z) = 0, & (6) \\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (7) \\ U_4(x,y,z,t) = 0, & (8) \end{cases}$$

obtenu en éliminant t entre les équations (1), (2). L'équation (6) a toutes les solutions communes à

$$(C)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (9) \\ V_2(x,y,z) = 0; & (10) \end{cases}$$

le système (B) se compose de (A), plus du système

$$(D)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (11) \\ V_2(x,y,z) = 0, & (12) \\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (13) \\ U_4(x,y,z,t) = 0. & (14) \end{cases}$$

Ayant déjà appris à résoudre les systèmes (B) et (D), le problème est résolu.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mathématiques spéciales : 1re Partie, Algèbre, par M. *G. de Longchamps*, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne. — Paris, Delagrave, 1883 ; in-8° de 680 pages. Prix : 10fr.

Le Cours de Mathématiques spéciales que l'auteur publie aujourd'hui est, sauf de légères modifications, celui qu'il a professé au lycée Charlemagne, dans ces dernières années. Il l'a rédigé en se conformant au dernier programme d'admission à l'École Polytechnique.

Ce Cours comprend trois Volumes : le premier est consacré à l'Algèbre, les deux autres à la Géométrie analytique à deux et trois dimensions; chacun de ces Ouvrages est divisé en Leçons, à la suite desquelles l'auteur a placé des exercices qui s'y rattachent immédiatement.

Le plus souvent l'auteur a donné, pour ces exercices, un renseignement sur la solution qu'on peut leur appliquer et il a indiqué le résultat auquel on doit aboutir. Les élèves, auxquels ce Cours est plus particulièrement destiné, n'ayant qu'un temps restreint à consacrer à la recherche des problèmes, l'auteur a pensé leur être utile en leur montrant, par les exercices qu'il leur propose, en même temps qu'une marche à suivre pour les résoudre, le résultat qu'ils doivent trouver.

RECTIFICATIONS.

La question 1468, proposée, p. 384, par M. d'Ocagne, l'avait été antérieurement par M. Laisant dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. VI, p. 168.

Page 82, ligne 4, *au lieu de* coniques, *lisez* cubiques.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME II, 3e SÉRIE.)

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure et infinitésimale.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique et Astronomie.

Calcul différentiel et intégral.

Pages

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME II, 3e SÉRIE.)

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

